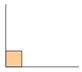
TRIGONOMETRIA I

MESURA D'ANGLES

- **Sistema sexagesimal**

La unitat fonamental de mesura d'angles en el sistema sexagesimal és el **grau sexagesimal (º)**

 Un angle recte mesura 90º

Els submúltiples del grau sexagesimal són el **minut (')** i el **segon ('')**.   1º=60' i 1'=60''

La mesura d'un angle en aquest sistema pot venir expressada en una única unitat (forma **incomplexa**) o en diverses unitats (forma **complexa**).

forma incomplexa		forma complexa
45,84º	=	45º 50' 24''

Exemple 1

Expressa en forma incomplexa de segons 35º 17' 26''.

$$\left.\begin{array}{r} 35^\circ = 35^\circ \cdot \dfrac{3\,600''}{1^\circ} = 126\,000'' \\ 17' = 17' \cdot \dfrac{60''}{1'} = 1\,020'' \end{array}\right\} \Rightarrow 35^\circ 17' 26'' = 126\,000'' + 1\,020'' + 26'' = 127\,046''$$

Exemple 2

Expressa en forma complexa 32046''.

32046''	60	
204	534'	60
246	**54'**	**8º**
6''		

$\Rightarrow 32\,046'' = 8^\circ\,54'\,6''$

- **Sistema internacional**

La unitat de mesura d'angles en el SI és el **radian (rad)**.

Un **radian** és la mesura de l'angle central d'una circumferència, que comprèn un arc de longitud igual a la del radi.

- **Equivalència entre graus i radians**

Com que la longitud de la circumferència és $2\pi r$, aquesta conté 2π vegades la longitud del radi. Així doncs, $360^\circ = 2\pi$ rad , $180^\circ = \pi$ rad .

Per tant, per passar de graus sexagesimals a radians multiplicarem pel factor de conversió $\dfrac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$.

Exemple 3

Expressa en radians l'angle $\alpha = 25{,}3^\circ$. $25{,}3^\circ \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} \simeq 0{,}44$ rad

TRIGONOMETRIA I

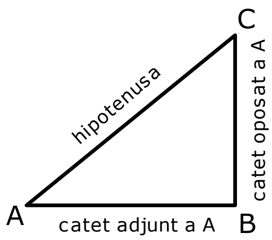
Exemple 4

Expressa en el sistema sexagesimal l'angle $\beta = \frac{5\pi}{12}$ rad .

$$\frac{5\pi}{12}\text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi\text{ rad}} = 75^\circ$$

RAONS TRIGONOMÈTRIQUES D'UN ANGLE AGUT. RESOLUCIÓ DE TRIANGLES RECTANGLES.

Considera el triangle rectangle ABC de la figura.

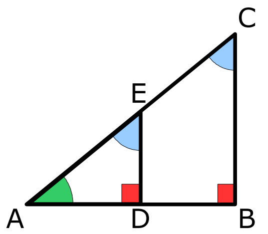


Les **raons trigonomètriques d'** $\hat{A}$ són:

$$\text{sinus}(\hat{A}) = \sin(\hat{A}) = \frac{\text{catet oposat a }\hat{A}}{\text{hipotenusa}} \qquad \text{cosecant}(\hat{A}) = \text{cosec}(\hat{A}) = \frac{1}{\sin(\hat{A})}$$

$$\text{cosinus}(\hat{A}) = \cos(\hat{A}) = \frac{\text{catet adjunt a }\hat{A}}{\text{hipotenusa}} \qquad \text{secant}(\hat{A}) = \sec(\hat{A}) = \frac{1}{\cos(\hat{A})}$$

$$\text{tangent}(\hat{A}) = \tan(\hat{A}) = \frac{\text{catet oposat a }\hat{A}}{\text{catet adjunt a }\hat{A}} \qquad \text{cotangent}(\hat{A}) = \cot(\hat{A}) = \frac{1}{\tan(\hat{A})}$$



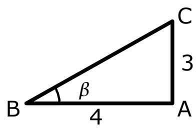
Fixa't en els triangles ABC i ADE. Són **triangles semblants**. Tenen els angles iguals i els costats són proporcionals.

El **Teorema de Tales** diu precisament que, per a triangles semblants les raons entre els seus costats es conserven; i per tant, les raons trigonomètriques.

Si la hipotenusa valgués 1, aleshores el $\sin(\hat{A})$ coincidiria amb la mesura del catet oposat a $\hat{A}$, i el $\cos(\hat{A})$ amb el catet adjunt a $\hat{A}$.

Exemple 5

Expressa les raons trigonomètriques de l'angle β de la figura.



Pel Teorema de Pitàgores, hipotenusa$=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

$$\sin(\beta)=\frac{3}{5},\ \cos(\beta)=\frac{4}{5},\ \tan(\beta)=\frac{3}{4},\ \text{cosec}(\beta)=\frac{5}{3},\ \sec(\beta)=\frac{5}{4},\ \cot(\beta)=\frac{4}{3}$$

- **Raons trigonomètriques dels angles de 30º, 45º i 60º**

	30º	45º	60º
sinus	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosinus	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangent	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

TRIGONOMETRIA I

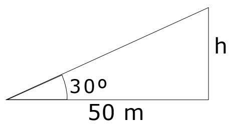
- **Resolució de triangles rectangles**

Resoldre un triangle vol dir conèixer el valor dels seus tres costats i dels seus angles.
Per a això utilitzaràs:

- El Teorema de Pitàgores: $\text{hipotenusa}^2 = \text{catet}_1^2 + \text{catet}_2^2$
- La suma dels angles interiors d'un triangle és 180º.
- Les raons trigonomètriques.

Exemple 6

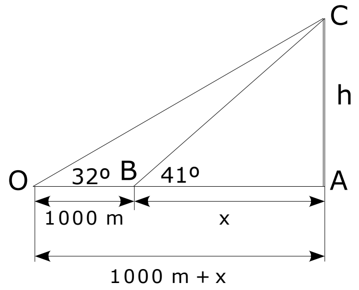
L'angle d'elevació del punt més alt d'una antena, observat des d'un punt del terra situat a 50 m del seu peu, és de 30º. Calcula l'alçària de l'antena.



$$\tan(30^\circ)=\frac{h}{50}\Rightarrow h=50\cdot\tan(30^\circ)=50\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\simeq 28{,}87\text{ m}$$

Exemple 7

L'angle d'elevació del punt més alt d'una muntanya, observat des d'un punt situat a terra, es de 32º. Quan ens aproximem 1000 m en direcció a la muntanya, el nou angle d'elevació és de 41º. Quina és l'altitud de la muntanya si els dos punts d'observació són al nivell del mar?



Considerant el triangle OAC tenim que $\tan(32^\circ)=\frac{h}{1000+x}$. (1)

Si tenim en compte el triangle BAC tenim que $\tan(41^\circ)=\frac{h}{x}$. (2)

Així doncs, aïllant h de les equacions (1) i (2), i igualant, obtenim:

$$(1000+x)\cdot\tan(32^\circ)=x\cdot\tan(41^\circ)$$

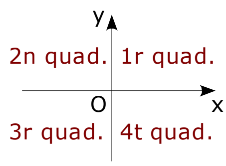
$$x=\frac{1000\cdot\tan(32^\circ)}{\tan(41^\circ)-\tan(32^\circ)}\simeq 2546{,}94\text{ m} \qquad h=\tan(41^\circ)\cdot x\simeq 2213{,}29\text{ m}$$

RAONS TRIGONOMÈTRIQUES D'UN ANGLE QUALSEVOL.

- **Angles orientats**

Donat un angle qualsevol, el podem situar sobre uns eixos de coordenades fent coincidir el vèrtex amb l'origen (0,0).

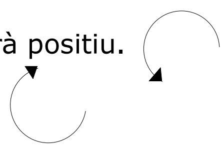
Els eixos divideixen el pla en quatre **quadrants**.

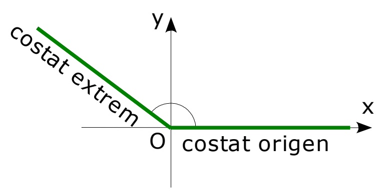


El costat origen el situarem sobre el semeix Ox positiu, i el costat extrem ens determinarà a quin quadrant pertanyerà l'angle.

Si l'angle gira en sentit antihorari serà positiu.

Si gira en sentit horari serà negatiu.

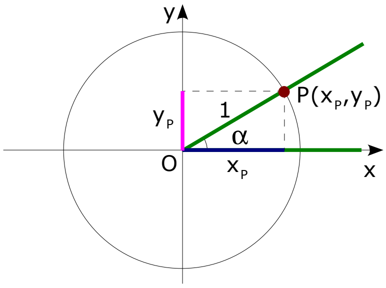




- **Circumferència goniomètrica i raons trigonomètriques d'un angle qualsevol**

La circumferència goniomètrica és la que té per centre l'origen de coordenades, i per radi, 1.

Considerem un angle del primer quadrant situat sobre uns eixos de coordenades i una circumferència goniomètrica.



El costat extrem de l'angle talla la circumferència en un punt P que té per coordenades (x_P,y_P).

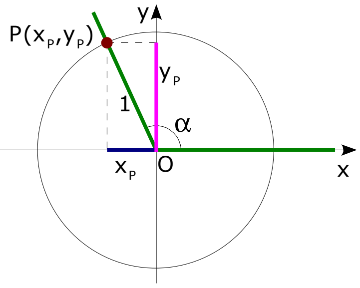
$$\sin(\alpha)=\frac{y_P}{1}=y_P$$

$$\cos(\alpha)=\frac{x_P}{1}=x_P$$

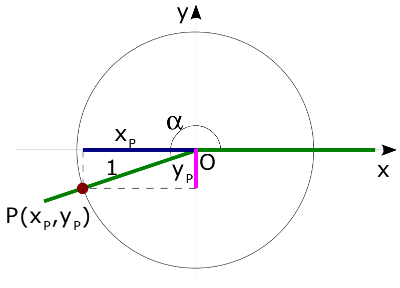
Com que en la circumferència el radi és 1, el sinus i el cosinus coincideixen, respectivament, amb l'ordenada i l'abscissa del punt P.

D'aquesta manera podrem trobar les raons trigonomètriques d'un angle qualsevol:

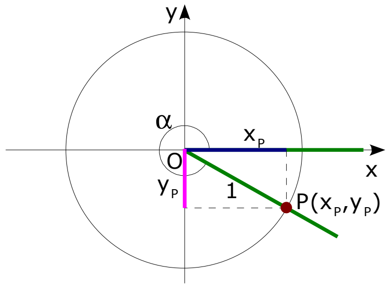
Angle del 2n quadrant



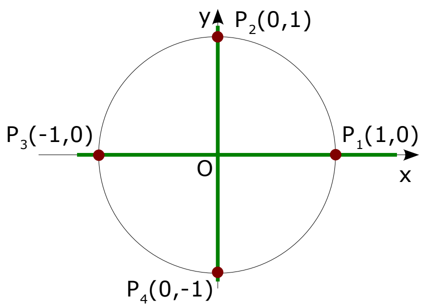
Angle del 3r quadrant



Angle del 4t quadrant



Fixa't també que sin(0º)=0, cos(0º)=1; sin(90º)=1, cos(90º)=0; sin(180º)=0, cos(180º)=-1; sin(270º)=-1, cos(270º)=0.



- **Propietats de les raons trigonomètriques d'un angle i relacions entre elles**

El sinus i el cosinus de qualsevol angle és sempre un valor comprès entre el -1 i l'1.

Identitat trigonomètrica fonamental o teorema fonamental de la trigonometria:

$$\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$$

Signe de les raons trigonomètriques en funció del quadrant al que pertany l'angle:

	sinus	cosinus	tangent
1r quadrant	+	+	+
2n quadrant	+	-	-
3r quadrant	-	-	+
4t quadrant	-	+	-

TRIGONOMETRIA I

La tangent d'un angle és igual al quocient entre el seu sinus i el cosinus: $\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

El quadrat de la secant d'un angle és igual al quadrat de la seva tangent més 1:

$1+\tan^2(\alpha)=\sec^2(\alpha)$

Exemple 8

Calcula cos(α) i tan(α) sabent que sin(α)=0,5 i que α pertany al primer quadrant.

Per la identitat trigonomètrica fonamental, $\cos^2(\alpha)=1-\sin^2(\alpha)=1-0,5^2=0,75$.

Per ser l'angle del primer quadrant, el cosinus serà positiu, així doncs, $\cos(\alpha)=+\sqrt{0,75}\simeq 0,87$.

$\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\simeq 0,57$

Exemple 9

Calcula sin(α) i cos(α) sabent que tan(α)=1 i que α pertany al tercer quadrant.

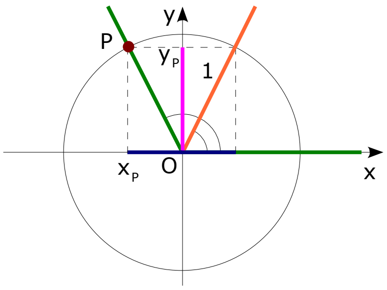
$1+\tan^2(\alpha)=\sec^2(\alpha) \Rightarrow \sec^2(\alpha)=1+1^2=2$; $\sec^2(\alpha)=\frac{1}{\cos^2(\alpha)}=2 \Rightarrow \cos^2(\alpha)=\frac{1}{2}$

Com que l'angle és del tercer quadrant, el cosinus serà negatiu, $\cos(\alpha)=-\sqrt{\frac{1}{2}}\simeq -0,7071$.

$\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \Rightarrow \sin(\alpha)=\cos(\alpha)\cdot\tan(\alpha)\simeq -0,7071$.

Exemple 10

Calcula, sempre emprar la calculadora, les raons trigonomètriques de 120º.



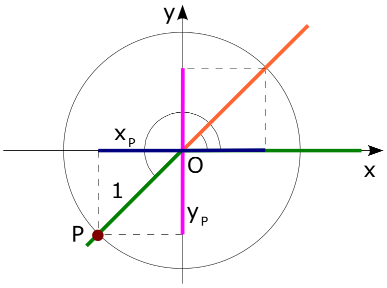
$\sin(120^\circ)=\sin(60^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\operatorname{cosec}(120^\circ)=\frac{1}{\sin(120^\circ)}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\cos(120^\circ)=-\cos(60^\circ)=-\frac{1}{2}$ $\quad$ $\sec(120^\circ)=\frac{1}{\cos(120^\circ)}=-2$

$\tan(120^\circ)=-\tan(60^\circ)=-\sqrt{3}$ $\quad$ $\cot(120^\circ)=\frac{1}{\tan(120^\circ)}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Exemple 11

Calcula, sempre emprar la calculadora, les raons trigonomètriques de 225º.



$\sin(225^\circ)=-\sin(45^\circ)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\operatorname{cosec}(225^\circ)=\frac{1}{\sin(225^\circ)}=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$

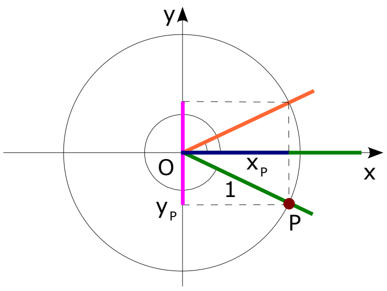
$\cos(225^\circ)=-\cos(45^\circ)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\sec(225^\circ)=\frac{1}{\cos(225^\circ)}=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$

$\tan(225^\circ)=\tan(45^\circ)=1$ $\quad$ $\cot(225^\circ)=\frac{1}{\tan(225^\circ)}=1$

TRIGONOMETRIA I

Exemple 12

Calcula, sempre emprar la calculadora, les raons trigonomètriques de 330º.



$$\sin(330^\circ)=-\sin(30^\circ)=-\frac{1}{2} \qquad \text{cosec}(330^\circ)=\frac{1}{\sin(330^\circ)}=-2$$

$$\cos(330^\circ)=\cos(30^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec(330^\circ)=\frac{1}{\cos(330^\circ)}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan(330^\circ)=-\tan(30^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cot(330^\circ)=\frac{1}{\tan(330^\circ)}=-\sqrt{3}$$

Exemple 13

Calcula, sempre emprar la calculadora, les raons trigonomètriques de 1590º.

$$\begin{array}{r|l} 1590 & 360 \\ \cline{2-2} 150 & 4 \end{array} \quad \Rightarrow \quad 1\,590^\circ=4\cdot 360^\circ+150^\circ$$

Per tant, l'angle de 1590º coincideix amb el de 150º. Així doncs, les seves raons trigonomètriques també coincidiran.

Les comparo, doncs, amb les de l'angle de 30º.

$$\sin(1590^\circ)=\sin(150^\circ)=\sin(30^\circ)=\frac{1}{2} \qquad \text{cosec}(1590^\circ)=\frac{1}{\sin(1590^\circ)}=2$$

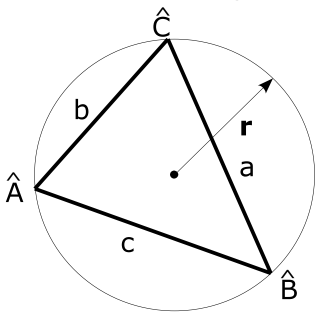
$$\cos(1590^\circ)=\cos(150^\circ)=-\cos(30^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec(1590^\circ)=\frac{1}{\cos(1590^\circ)}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan(1590^\circ)=\tan(150^\circ)=-\tan(30^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cot(1590^\circ)=\frac{1}{\tan(1590^\circ)}=-\sqrt{3}$$

TEOREMA DEL SINUS I TEOREMA DEL COSINUS.

- **Teorema del sinus**

Donat un triangle qualsevol, es verifica que $\frac{a}{\sin(\hat{A})}=\frac{b}{\sin(\hat{B})}=\frac{c}{\sin(\hat{C})}$.



Interpretació geomètrica:

$\frac{a}{\sin(\hat{A})}=\frac{b}{\sin(\hat{B})}=\frac{c}{\sin(\hat{C})}=2r$ on r és el radi de la circumferència circumscrita al triangle ABC.

- **Teorema del cosinus**

Donat un triangle qualsevol, es verifica que $a^2=b^2+c^2-2\,bc\cdot\cos(\hat{A})$

Exemple 14

Troba el costat a del triangle ABC, sabent que $\hat{A}=50^\circ$, $\hat{B}=30^\circ$ i $b=5$ cm

Pel teorema del sinus: $\dfrac{a}{\sin(\hat{A})}=\dfrac{b}{\sin(\hat{B})} \Rightarrow \dfrac{a}{\sin(50^\circ)}=\dfrac{5}{\sin(30^\circ)} \Rightarrow a=\dfrac{5\cdot\sin(50^\circ)}{\sin(30^\circ)} \simeq 7{,}66$ cm .

Exemple 15

Troba el costat c del triangle ABC, sabent que $\hat{C}=120^\circ$, $b=5$ cm i $a=8$ cm . Calcula l'àrea.

Pel teorema del cosinus: $c=\sqrt{a^2+b^2-2\,ab\cdot\cos(\hat{C})}=\sqrt{8^2+5^2-2\cdot 8\cdot 5\cdot\cos(120^\circ)} \simeq 11{,}36$ cm

L'àrea del triangle és $A_T=\dfrac{a\cdot b\sin(\hat{C})}{2}=\dfrac{8\cdot 5\sin(120^\circ)}{2} \simeq 17{,}32\ \text{cm}^2$

Exemple 16

Resol el triangle ABC, sabent que $a=340$ cm, $\hat{B}=42^\circ$ i $\hat{C}=57^\circ$.

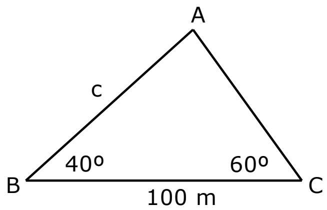
La suma dels angles interiors d'un triangle és 180º; per tant, $\hat{A}=180^\circ-(\hat{B}+\hat{C})=81^\circ$

Pel teorema del sinus: $\dfrac{a}{\sin(\hat{A})}=\dfrac{b}{\sin(\hat{B})} \Rightarrow \dfrac{340}{\sin(81^\circ)}=\dfrac{b}{\sin(42^\circ)} \Rightarrow b=\dfrac{340\cdot\sin(42^\circ)}{\sin(81^\circ)} \simeq 230{,}34$ cm

Tornem a aplicar el teorema del sinus: $\dfrac{a}{\sin(\hat{A})}=\dfrac{c}{\sin(\hat{C})} \Rightarrow c=\dfrac{340\cdot\sin(57^\circ)}{\sin(81^\circ)} \simeq 288{,}70$ cm

Exemple 17

A quina distància del refugi situat en A es troba un observador situat en B, el qual dista 100 m d'un altre punt C, si s'han mesurat els angles $\hat{B}=40^\circ$ i $\hat{C}=60^\circ$?



$\hat{A}=180^\circ-(\hat{B}+\hat{C})=80^\circ$

Pel teorema del sinus: $\dfrac{a}{\sin(\hat{A})}=\dfrac{c}{\sin(\hat{C})} \Rightarrow c=\dfrac{100\cdot\sin(60^\circ)}{\sin(80^\circ)} \simeq 87{,}94$ m

L'observador es troba a 87,94 m del refugi.

Exemple 18

Resol el triangle ABC, sabent que $\hat{A}=40^\circ$, $b=5$ cm i $c=12$ cm .

Pel teorema del cosinus: $a=\sqrt{b^2+c^2-2\,bc\cdot\cos(\hat{A})}=\sqrt{5^2+12^2-120\cdot\cos(40^\circ)} \simeq 8{,}78$ cm

Tornem a aplicar el teorema del cosinus: $b^2=a^2+c^2-2\,ac\cdot\cos(\hat{B}) \Rightarrow \cos(\hat{B})=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2\,ac} \simeq 0{,}9306$

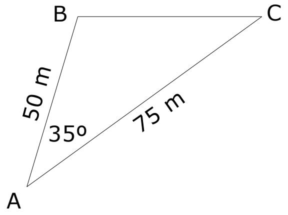
$\hat{B} \simeq 21{,}47^\circ$

$\hat{C}=180^\circ-(\hat{A}+\hat{B}) \simeq 118{,}53^\circ$

TRIGONOMETRIA I

Exemple 19

Dos amics parteixen d'un mateix punt A i segueixen direccions que formen entre elles un angle de 35º. Després de caminar 50 m i 75 m, respectivament, se situen en dos punts B i C. Calcula la distància que els separa i els angles $\hat{B}$ i $\hat{C}$ del triangle ABC.



Pel teorema del cosinus: $a=\sqrt{b^2+c^2-2\,bc\cdot\cos(35^\circ)}\simeq 44{,}51\text{ m}$

$$b^2=a^2+c^2-2\,ac\cdot\cos(\hat{B})\Rightarrow\cos(\hat{B})=\frac{a^2+c^2-b^2}{2\,ac}\simeq 0{,}7648\Rightarrow\hat{B}\simeq 40{,}11^\circ$$

$$\hat{C}=180^\circ-(\hat{A}+\hat{B})\simeq 104{,}89^\circ$$

Exemple 20

Resol el triangle ABC, sabent que $a=5\text{ cm}$, $b=3\text{ cm}$ i $c=7\text{ cm}$.

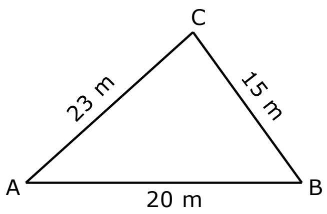
Pel teorema del cosinus: $a^2=b^2+c^2-2\,bc\cdot\cos(A^\circ)\Rightarrow\cos(A^\circ)=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc}\simeq 0{,}7857\Rightarrow\hat{A}\simeq 38{,}21^\circ$

Igualment podem deduir que $\cos(B^\circ)=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2\,ac}\simeq 0{,}9286\Rightarrow\hat{B}\simeq 21{,}79^\circ$

$$\hat{C}=180^\circ-(\hat{A}+\hat{B})\simeq 120^\circ$$

Exemple 21

L'entrenador d'un equip de futbol indica a tres jugadors, A, B i C, que se situïn en el camp formant un triangle. A s'ha de situar a 20 m de B, B a 15 m de C i C a 23 m d'A. Sota quin angle observa cada jugador els altres dos?



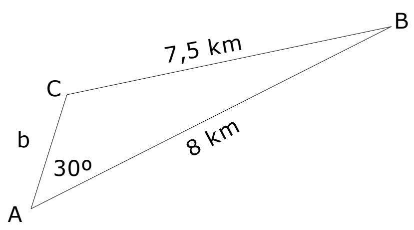
Pel teorema del cosinus: $\cos(A^\circ)=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc}\simeq 0{,}7652\Rightarrow\hat{A}\simeq 40{,}07^\circ$

Igualment, $\cos(B^\circ)=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2\,ac}\simeq 0{,}16\Rightarrow\hat{B}\simeq 80{,}79^\circ$

$$\hat{C}=180^\circ-(\hat{A}+\hat{B})\simeq 59{,}14^\circ$$

Exemple 22

En un instant determinat un avió és a 8 km de la torre de control d'un aeroport i a 7,5 km d'un dirigible. Si tots dos són observats sota un angle de 30º, a quina distància de l'aeroport es troba en aquest moment el dirigible?



Pel teorema del cosinus: $7{,}5^2=b^2+8^2-2\cdot 8\,b\cdot\cos(30^\circ)$

$$b^2-13{,}86\,b+7{,}75=0\Rightarrow b=\frac{13{,}86\pm\sqrt{13{,}86^2-4\cdot1\cdot7{,}75}}{2}$$

En aquest cas hi ha dues solucions:

$b_1\simeq 13{,}27\text{ km}$ i $b_2\simeq 0{,}58\text{ km}$