# Ε Μ Β Α Δ Ο Ν   Ε Π Ι Π Ε Δ Ο Υ   Χ Ω Ρ Ι Ο Υ

## Ε Ν Ο Τ Η Τ Α 1η

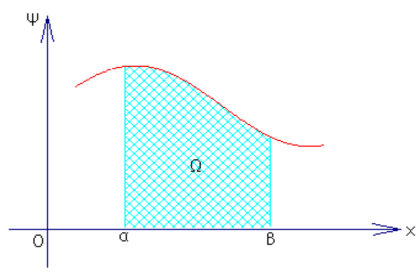
### Θεωρητική προσέγγιση

**Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος παρουσιάστηκε αρχικά σαν μία μέθοδος υπολογισμού του εμβαδού επίπεδου σχήματος με προσέγγιση από εμβαδά απλών σχημάτων.Η μέθοδος αυτή εφαρμόστηκε για πρώτη φορά από τον Αρχιμήδη για τον υπολογισμό του εμβαδού κύκλου,παραβολικού χωρίου κ.τ.λ και είναι γνωστή ως «μέθοδος της εξάντλησης».**
**Αυστηρή εισαγωγή στην έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος έγινε πρώτα από τον Riemann στα μέσα του 19ου αιώνα και μετά ακολούθησαν γενικεύσεις της έννοιας αυτής από τον Lebesque.**
**Σήμερα η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος δεν περιορίζεται μόνο για την έκφραση εμβαδών αλλά επεκτείνεται στην έκφραση εννοιών της φυσικής, της θεωρίας των πιθανοτήτων,της στατιστικής κ.τ.λ.**

**Α. Εμβαδόν επίπεδου χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση συνάρτησης**

Έστω μια συνάρτηση $f$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $\Omega$ το χωρίο που ορίζεται από την $C_f$ ,τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi=\alpha$ και $\chi=\beta$.

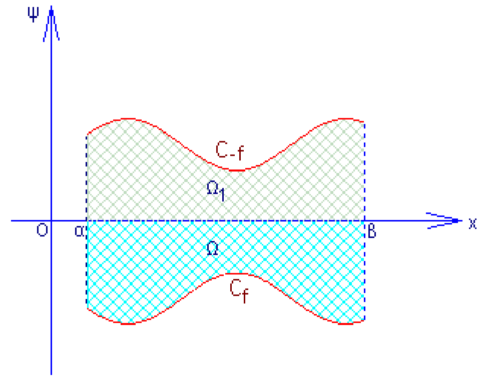
✓**α.** Όταν $f(\chi)\geq 0$ για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$,τότε το εμβαδόν του χωρίου $\Omega$ είναι η γεωμετρική ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος



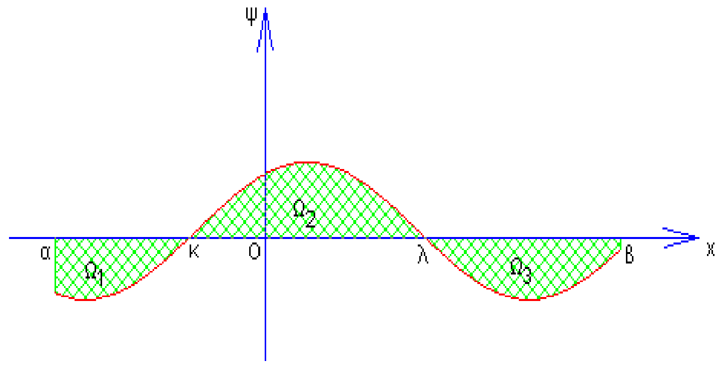

δηλαδή $\mathrm{E}(\Omega)=\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi$.

✓**β.** Όταν $f(\chi)\leq 0$ για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$,τότε είναι $-f(\chi)\geq 0$ για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$.Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f,-f$ στο $[\alpha,\beta]$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $\chi'\chi$.
Έστω $\Omega_1$ το χωρίο που ορίζεται από την $C_{-f}$ ,τον $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi=\alpha$ και $\chi=\beta$.Λόγω της συμμετρίας των χωρίων $\Omega$ και $\Omega_1$ τα εμβαδά τους είναι ίσα και σύμφωνα με το α) έχουμε:

$$\mathrm{E}(\Omega)=\mathrm{E}(\Omega_1)=\int_\alpha^\beta[-f(\chi)]d\chi=-\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi=\int_\alpha^\beta|f(\chi)|d\chi.$$




✓**γ.** Αν η $f$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$,τότε το εμβαδόν του χωρίου $\Omega$ θα είναι το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω και κάτω από τον άξονα $\chi'\chi$ .Άρα το $\mathrm{E}(\Omega)$ θα ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των αντίστοιχων ορισμένων ολοκληρωμάτων.




Για το παραπάνω σχήμα $\mathrm{E}(\Omega)=\mathrm{E}(\Omega_1)+\mathrm{E}(\Omega_2)+\mathrm{E}(\Omega_3)=-\int_\alpha^\kappa f(\chi)d\chi+\int_\kappa^\lambda f(\chi)d\chi-\int_\lambda^\beta f(\chi)d\chi=$ $\int_\alpha^\kappa |f(\chi)|d\chi+\int_\kappa^\lambda |f(\chi)|d\chi+\int_\lambda^\beta |f(\chi)|d\chi=\int_\alpha^\beta |f(\chi)|d\chi$ .

✓**δ.** Συνοψίζοντας όλες τις παραπάνω περιπτώσεις το εμβαδόν του χωρίου $\Omega$ δίνεται από τον τύπο $\mathrm{E}(\Omega)=\int_\alpha^\beta |f(\chi)|d\chi$ .

➤ **Σχόλιο**

**Για να βρούμε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi=\alpha$ και $\chi=\beta$ με $\alpha<\beta$ ,ενεργούμε ως εξής:**

- **Εξασφαλίζουμε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.**
- **Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\mathrm{E}=\int_\alpha^\beta |f(\chi)|d\chi$ .Βρίσκουμε το πρόσημο της $f$ στο $[\alpha,\beta]$ και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.**

**Το πρόσημο της $f$ πολλές φορές καθορίζεται με τη βοήθεια της μονοτονίας της.**

**Σημείωση: Όταν μας ζητάνε να βρούμε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την $C_f$ και τον άξονα $\chi'\chi$ ,βρίσκουμε τα σημεία τομής της $C_f$ με τον άξονα $\chi'\chi$ λύνοντας την εξίσωση $f(\chi)=0$ .Η μικρότερη ρίζα και η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης δίνουν τις ευθείες $\chi=\alpha$ και $\chi=\beta$ από τις οποίες καθορίζεται το χωρίο.**

**Εφαρμογή 1η**

**Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^3+\chi-2$.Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την $C_f$,τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi=0$ και $\chi=2$.**

**Λύση**

$D_f=R$.Η $f$ ως πολυωνυμική είναι συνεχής,οπότε είναι συνεχής στο $[0,2]$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\mathrm{E}=\int_0^2|f(\chi)|d\chi$.

$f(\chi)=(\chi-1)(\chi^2+\chi+2)$.Για κάθε $\chi\in R$ είναι $\chi^2+\chi+2>0$,γιατί η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική.Άρα $f(\chi)\le 0$ για κάθε $\chi\in[0,1]$ και $f(\chi)\ge 0$ για κάθε $\chi\in[1,2]$.

$$\mathrm{E}=-\int_0^1 f(\chi)d\chi+\int_1^2 f(\chi)d\chi=-\left[\frac{\chi^4}{4}+\frac{\chi^2}{2}-2\chi\right]_0^1+\left[\frac{\chi^4}{4}+\frac{\chi^2}{2}-2\chi\right]_1^2=\frac{9}{2}$$ τετρ.μονάδες.

**Εφαρμογή 2η**

**Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^3-4\chi$.Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την $C_f$ και τον άξονα $\chi'\chi$.**

**Λύση**

$$D_f=R.\ f(\chi)=0\Leftrightarrow \chi(\chi^2-4)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\chi=0\\ \acute{\eta}\\ \chi^2-4=0\Leftrightarrow\chi=-2\ \acute{\eta}\ \chi=2\end{cases}.$$

Η $f$ ως πολυωνυμική είναι συνεχής,οπότε είναι συνεχής στο $[-2,2]$.Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\mathrm{E}=\int_{-2}^2|f(\chi)|d\chi$. $f(\chi)=\chi(\chi^2-4)$.

| $\chi$ | $-2$ | | $0$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\chi$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\chi^2-4$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ |
| $f(\chi)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |

Με βάση τον παραπάνω πίνακα έχουμε $\mathrm{E}=\int_{-2}^0 f(\chi)d\chi-\int_0^2 f(\chi)d\chi=\left[\frac{\chi^4}{4}-2\chi^2\right]_{-2}^0-\left[\frac{\chi^4}{4}-2\chi^2\right]_0^2=$

$8$ τετρ.μονάδες.

**Εφαρμογή 3η**

**Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\chi)=\chi-e^\chi$.Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την $C_f$,τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi=1$ και $\chi=2$.**

**Λύση**

$D_f=R$.Η $f$ είναι συνεχής στο $R$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων,οπότε είναι συνεχής στο $[1,2]$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\mathrm{E}=\int_1^2|f(\chi)|d\chi$.

Η $f$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(\chi)=1-e^\chi$.Για κάθε $\chi>0$, $e^\chi>1\Leftrightarrow 1-e^\chi<0\Leftrightarrow f'(\chi)<0$.Άρα η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$,οπότε $1\le\chi\le 2\Rightarrow f(2)\le f(\chi)\le f(1)=1-e<0$.

Συνεπώς για κάθε $\chi \in [1,2]$ είναι $f(\chi) < 0$.

$$\mathrm{E} = -\int_1^2 f(\chi)d\chi = \int_1^2 (e^{\chi} - \chi)d\chi = \left[e^{\chi} - \frac{\chi^2}{2}\right]_1^2 = e^2 - e - \frac{3}{2} \text{ τετρ.μον.}$$

**<u>Σημείωση:</u>** Το πρόσημο της $f$ στο $[1,2]$ μπορούμε να το βρούμε και ως εξής:

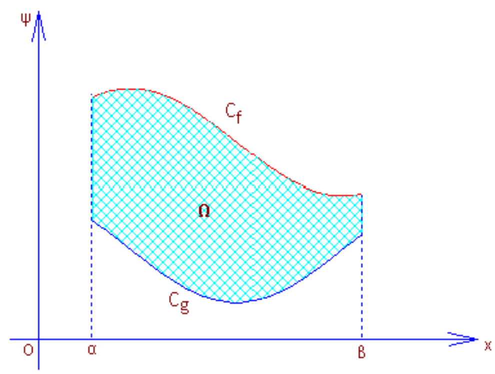
$$1 \le \chi \le 2 \Leftrightarrow e \le e^{\chi} \le e^2 . \begin{cases} 1 \le \chi \le 2 \\ \kappa\alpha\iota \\ -e^2 \le -e^{\chi} \le -e \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 1 - e^2 \le \chi - e^{\chi} \le 2 - e \Rightarrow f(\chi) < 0 .$$

## Β. Εμβαδόν χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων

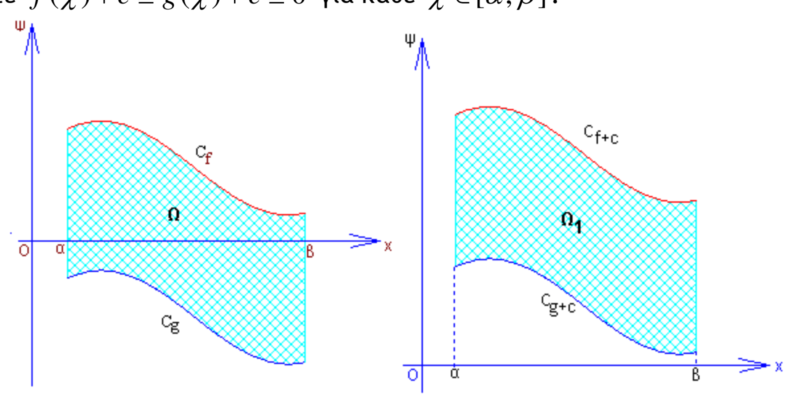
Έστω $f, g$ συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και $\Omega$ το χωρίο που περικλείεται από τις $C_f, C_g$ και τις ευθείες $\chi = \alpha$ και $\chi = \beta$.

✓**α.** Αν $f(\chi) \ge g(\chi) \ge 0$ για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$ και $\Omega_1, \Omega_2$ τα χωρία που ορίζονται αντίστοιχα από τις $C_f, C_g$ ,τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi = \alpha$ και $\chi = \beta$,τότε το εμβαδόν του χωρίου $\Omega$ είναι

$$\mathrm{E}(\Omega) = \mathrm{E}(\Omega_1) - \mathrm{E}(\Omega_2) = \int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi - \int_\alpha^\beta g(\chi)d\chi = \int_\alpha^\beta [f(\chi) - g(\chi)]d\chi .$$



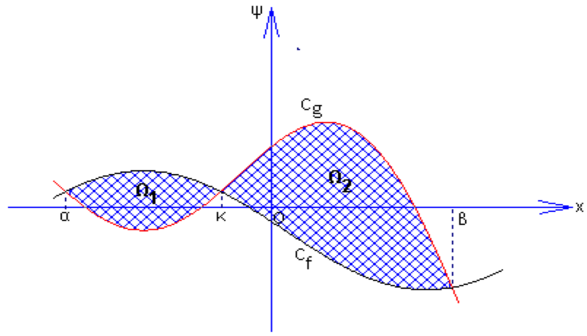

✓**β.** Αν $f(\chi) \ge g(\chi)$ για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$,επειδή οι $f, g$ είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ θα υπάρχει σταθερά $c \in R$ τέτοια,ώστε $f(\chi) + c \ge g(\chi) + c \ge 0$ για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$.




Το εμβαδόν του χωρίου $\Omega_1$ που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των $f + c, g + c$ και τις ευθείες $\chi = \alpha$ και $\chi = \beta$ είναι ίσο με το εμβαδόν του χωρίου $\Omega$ λόγω μετατόπισης του $\Omega$.

Σύμφωνα με το α) $\mathrm{E}(\Omega) = \mathrm{E}(\Omega_1) = \int_\alpha^\beta [(f(\chi) + c) - (g(\chi) + c)]d\chi = \int_\alpha^\beta [f(\chi) - g(\chi)]d\chi$ .

✓**γ.** Αν η διαφορά $f(\chi)-g(\chi)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$,τότε το εμβαδόν του χωρίου $\Omega$ με βάσει τα παραπάνω είναι το αλγεβρικό άθροισμα των ολοκληρωμάτων με πρώτο άκρο ολοκλήρωσης το $\alpha$ ,ενδιάμεσα άκρα ολοκλήρωσης τις τετμημένες των κοινών σημείων των $C_f, C_g$ στο $[\alpha,\beta]$ και τελευταίο άκρο ολοκλήρωσης το $\beta$.




Έτσι για το παραπάνω σχήμα είναι $\mathrm{E}(\Omega)=\mathrm{E}(\Omega_1)+\mathrm{E}(\Omega_2)=\int_\alpha^\kappa [f(\chi)-g(\chi)]d\chi +$

$\int_\kappa^\beta [g(\chi)-f(\chi)]d\chi = \int_\alpha^\kappa |f(\chi)-g(\chi)|d\chi + \int_\kappa^\beta |f(\chi)-g(\chi)|d\chi = \int_\alpha^\beta |f(\chi)-g(\chi)|d\chi$.

✓**δ.** Συνοψίζοντας τις παραπάνω περιπτώσεις το εμβαδόν του χωρίου $\Omega$ δίνεται από τον τύπο $\mathrm{E}(\Omega)=\int_\alpha^\beta |f(\chi)-g(\chi)|d\chi$.

➤ **Σχόλιο**

**Για να βρούμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f, g$ και τις ευθείες $\chi=\alpha$ και $\chi=\beta$ με $\alpha<\beta$ ,ενεργούμε ως εξής:**

- **Εξασφαλίζουμε ότι οι συναρτήσεις είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$,οπότε και η διαφορά τους είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$.**
- **Το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από τον τύπο $\mathrm{E}=\int_\alpha^\beta |f(\chi)-g(\chi)|d\chi$.Βρίσκουμε το πρόσημο της διαφοράς $f(\chi)-g(\chi)$ στο $[\alpha,\beta]$ και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.**

**Σημείωση**

- **Όταν το ζητούμενο εμβαδόν καθορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ και την εφαπτομένη της $C_f$ σε ένα σημείο της,τότε για το πρόσημο της διαφοράς θα μας βοηθήσει η κυρτότητα της $f$ .**
- **Όταν μας ζητάνε να βρούμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $C_f, C_g$ ,βρίσκουμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των δύο γραφικών παραστάσεων, λύνοντας την εξίσωση $f(\chi)=g(\chi)$ .Η μικρότερη και η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης δίνουν τις ευθείες $\chi=\alpha$ και $\chi=\beta$ από τις οποίες καθορίζεται το χωρίο.**

**Προσοχή**

**Όταν το χωρίο του οποίου ζητάμε το εμβαδόν δεν καθορίζεται μόνο από τις $C_f, C_g$ και τις ευθείες $\chi=\alpha$ και $\chi=\beta$ ,τότε χρειαζόμαστε σχήμα με βάση το οποίο το ζητούμενο εμβαδό προκύπτει ως αλγεβρικό άθροισμα επιμέρους εμβαδών.**

**Εφαρμογή 1η**

**Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\chi)=\eta\mu\chi, g(\chi)=\chi$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $C_f, C_g$ και τις ευθείες $\chi=0$ και $\chi=\pi$.**

**Λύση**

$D_f=R, D_g=R$. Οι $f,g$ είναι συνεχείς, οπότε είναι συνεχείς στο $[0,\pi]$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\mathrm{E}=\int_0^\pi |f(\chi)-g(\chi)|d\chi$.

Έχουμε $|\eta\mu\chi|\le|\chi|$ για κάθε $\chi\in R$. Άρα για κάθε $\chi\in[0,\pi]$ είναι $\eta\mu\chi\le\chi \Leftrightarrow \chi-\eta\mu\chi\ge 0$.

Άρα $\mathrm{E}=\int_0^\pi(\chi-\eta\mu\chi)d\chi=\left[\frac{\chi^2}{2}+\sigma\upsilon\nu\chi\right]_0^\pi=\frac{\pi^2}{2}-2=\frac{\pi^2-4}{2}$ τετρ.μονάδες.

**Εφαρμογή 2η**

**Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\chi)=\chi^3-2\chi^2, g(\chi)=\chi-2$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $C_f, C_g$.**

**Λύση**

$D_f=D_g=R$. $f(\chi)=g(\chi)\Leftrightarrow \chi^3-2\chi^2=\chi-2 \Leftrightarrow \chi^3-2\chi^2-\chi+2=0 \Leftrightarrow (\chi^2-1)(\chi-2)=0 \Leftrightarrow$
$\chi=\pm1$ ή $\chi=2$.

Οι συναρτήσεις $f,g$ είναι συνεχείς στο $[-1,2]$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\mathrm{E}=\int_{-1}^2|f(\chi)-g(\chi)|$.

$f(\chi)-g(\chi)=\chi^3-2\chi^2-\chi+2=(\chi^2-1)(\chi-2)$.

| $\chi$ | $-1$ | | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\chi^2-1$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $\chi-2$ | | $-$ | | $-$ | 0 |
| $f(\chi)-g(\chi)$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 |

Έχουμε $f(\chi)-g(\chi)\ge0$ για κάθε $\chi\in[-1,1]$ και $f(\chi)-g(\chi)\le0$ για κάθε $\chi\in[1,2]$.

Άρα $\mathrm{E}=\int_{-1}^1(\chi^3-2\chi^2-\chi+2)d\chi-\int_1^2(\chi^3-2\chi^2-\chi+2)d\chi=$

$\left[\frac{\chi^4}{4}-\frac{2\chi^3}{3}-\frac{\chi^2}{2}+2\chi\right]_{-1}^1-\left[\frac{\chi^4}{4}-\frac{2\chi^3}{3}-\frac{\chi^2}{2}+2\chi\right]_1^2=\ldots=\frac{37}{12}$ τετρ.μονάδες.

**Εφαρμογή 3η**

**Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\chi)=\chi^3$.**

**Να βρείτε:**

**i. Την εφαπτομένη $\varepsilon$ της $C_f$ στο σημείο $\mathrm{A}(1,f(1))$.**

**ii. Το εμβαδόν του χωρίου $\Omega$ που περικλείεται από την $C_f$, τον άξονα $\chi'\chi$ και την $\varepsilon$.**

**iii. Την ευθεία $\chi=\alpha$ η οποία χωρίζει το $\Omega$ σε δύο ισεμβαδικά χωρία.**

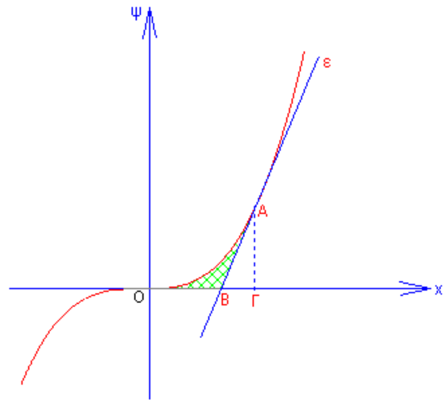
**Λύση**

$D_f=R$.

i. Η $f$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(\chi)=3\chi^2$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης $\varepsilon$ είναι $\varepsilon:\psi-f(1)=f'(1)(\chi-1)\Leftrightarrow\psi=3\chi-2$.

**ii.**




Για $\psi = 0$ από την εξίσωση της εφαπτομένης παίρνουμε $\chi = \frac{2}{3}$.Άρα η $\varepsilon$ τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$ στο σημείο $\mathrm{B}(\frac{2}{3},0)$.

Έστω $\mathrm{E}_1$ το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την $C_f$ ,τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi = 0$ και $\chi = 1$.

Η $f$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ με $f(\chi) \geq 0$ για κάθε $\chi \in [0,1]$.Άρα $\mathrm{E}_1 = \int_0^1 \chi^3 d\chi = \left[\frac{\chi^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$ τετρ.μον

Το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι $(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}(\mathrm{B\Gamma})(\mathrm{A\Gamma}) = \frac{1}{6}$ τετρ.μονάδες.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\mathrm{E}(\Omega) = \mathrm{E}_1 - (\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{12}$ τετρ.μονάδες.

**iii.** Αρχικά πρέπει $0 < \alpha < 1$.Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την $C_f$ ,τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi = 0$ και $\chi = \alpha$ είναι $\mathrm{E}_2 = \int_0^\alpha \chi^3 d\chi = \left[\frac{\chi^4}{4}\right]_0^\alpha = \frac{\alpha^4}{4}$.

Θέλουμε $\mathrm{E}_2 = \frac{\mathrm{E}(\Omega)}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha^4}{4} = \frac{1}{24} \Leftrightarrow \alpha^4 = \frac{1}{6} \overset{0<\alpha<1}{\Leftrightarrow} \alpha = \frac{1}{\sqrt[4]{6}} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\sqrt[4]{216}}{6}$.Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η $\chi = \frac{\sqrt[4]{216}}{6}$.