MATEMATICA FINANZIARIA

Mario Sandri
www.mariosandri.it

INDICE

Capitalizzazione	Pagina 3
Sconto e valore attuale	Pagina 10
Equivalenza finanziaria e operazioni composte	Pagina 14
Rendite	Pagina 16

CAPITALIZZAZIONE

Definizioni

Il **contratto di prestito** o **di mutuo** è quell'operazione finanziaria che si determina ogni qual volta persone o imprese, avendo bisogno di denaro, trovano qualcuno disposto a prestare loro, per un certo periodo di tempo, quella somma.

Mutuante o **creditore**: colui che dà in prestito il denaro
Mutuatario o **debitore**: colui che riceve in prestito il denaro

Legge della capitalizzazione

$$M = C + I$$

dove
M = montante
C = capitale
I = interesse (in generale l'interesse viene calcolato in funzione del tasso di interesse i e del tempo t)

Capitalizzazione semplice

Si parla di **prestito a interesse semplice** quando l'interesse è proporzionale al capitale e al tempo.

$$I = C\,i\,t$$

Il tempo viene espresso in anni. Può capitare che la durata sia frazionata. In questo caso il tempo si calcola:

$$t = n + \frac{m}{12} + \frac{g}{360}$$

dove
n = numero intero di anni
m = frazione d'anno corrispondente al numero di mesi
g = frazione d'anno corrispondente al numero di giorni.

Si adotta convenzionalmente l'anno commerciale pari a 360 giorni.

La **legge della capitalizzazione a interesse semplice** è

$$M = C\,(1 + it)$$

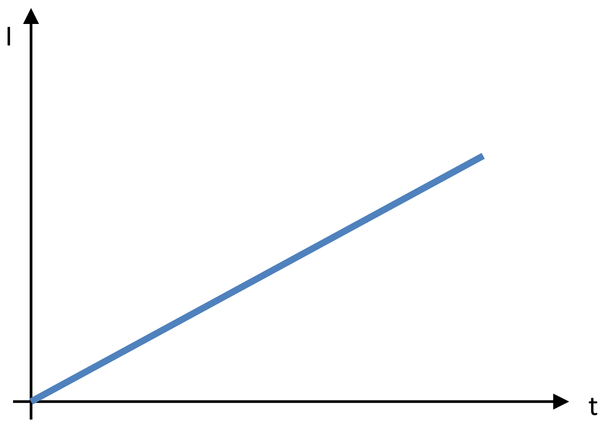
Il montante a interesse semplice si ottiene come prodotto di C per il fattore $(1 + it)$.

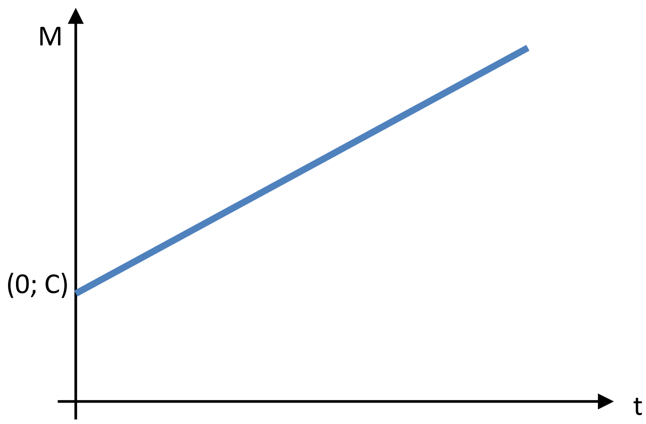
Il regime ad interesse semplice si applica generalmente nei prestiti con scadenza inferiore a un anno e con **pagamento posticipato dell'interesse**.

creditore	cede C	incassa $C + I$
	0	t
debitore	riceve C	restituisce $C + I$

A volte si può considerare il **pagamento anticipato dell'interesse**.

Creditore	cede $C - I$	incassa C
	0	t
debitore	riceve $C - I$	restituisce C





Nei due grafici la pendenza della retta indica il prodotto *Ci*. Per ricavare dai grafici i due parametri dunque è necessario calcolarsi la pendenza tramite formula. Nel grafico *M-t* è possibile ricavare immediatamente il capitale che risulta essere la coordinata del punto di intersezione tra la retta e l'asse *y*. Dato questo valore e la pendenza si ricava *i*. Se il capitale fosse unitario, C = 1, la pendenza della retta sarebbe *i*.

Nota matematica

Dati due punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ la pendenza di una retta si calcola come:

$$pendenza = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Capitalizzazione composta

Il regime di **capitalizzazione composto** consiste nella capitalizzazione periodica degli interessi. Il periodo di capitalizzazione è generalmente un anno e si parla di capitalizzazione annua, qualora il periodo sia inferiore all'anno si parla di capitalizzazione frazionata.

Si consideri $t = 1$, calcoliamo il montante al primo anno M_1

$$M_1 = C\,(1 + i)$$

Poi quello al secondo anno applicando l'interesse sul nuovo capitale

$$M_2 = M_1\,(1 + i) = C\,(1 + i)\,(1 + i) = C\,(1 + i)^2$$

Vediamo cosa succede al terzo anno

$$M_3 = M_2\,(1 + i) = C\,(1 + i)^2\,(1 + i) = C\,(1 + i)^3$$

Procedendo in modo analogo per *n* anni il montante sarà

$$\boldsymbol{M = C\,(1 + i)^n}$$

Il montante a interesse composto si calcola moltiplicando il capitale per il fattore $(1 + i)^n$ di capitalizzazione composta.

Quando è irrilevante specificare i, il binomio $(1 + i)$ si può indicare con la lettera u, ponendo $u = 1 + i$, da cui

$$\boldsymbol{M = C\,u^n}$$

Applicazione formula

Il modo più semplice per utilizzare la formula precedente è quella di usare una calcolatrice scientifica altrimenti è possibile utilizzare un **prontuario** che fornisce i valori della funzione $y = (1 + i)^n$ con 8 cifre decimali. Tuttavia i prontuari non sono scritti per ogni tasso e per ogni tempo. In questo caso è necessario eseguire un'operazione matematica per ricavare i tassi o i tempi non tabulati. Tale formula è l'**interpolazione lineare**.

Considerando una funzione $y= f(x)$ siano noti i valori che assume la funzione in x_1 e x_2. Il problema è quello di ricavare il valore della funzione in un punto x compreso tra x_1 e x_2. La tecnica dell'interpolazione lineare consiste nell'approssimare la funzione con la retta passante per $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$ e di utilizzare la formula

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Montante per anni non interi

Per calcolare il montante in caso di anni non interi si possono utilizzare due formule. La prima è una formula lineare e prende il nome di **capitalizzazione mista**

$$M_t = C\,(1 + i)^n\,(1 + if)$$

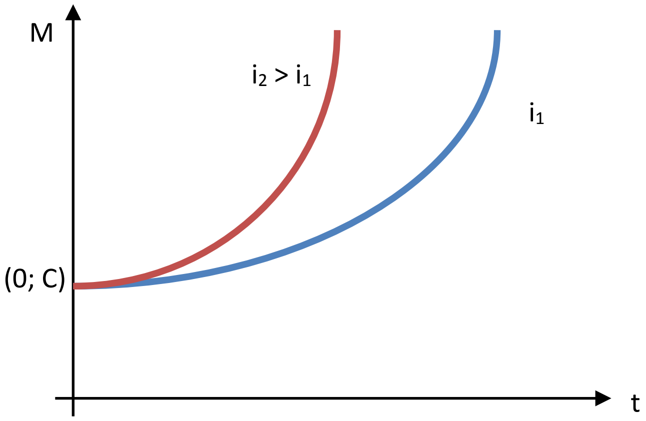
dove *f* rappresenta una frazione propria di anno. Questa formula ha lo svantaggio di non essere facilmente risolvibile nel regime dei tempi.

Per ovviare a tale inconveniente si utilizza la formula più semplice algebricamente parlando, ma di più difficile soluzione se non si dispone di una calcolatrice scientifica. Tale formula è esponenziale

$$M = C\,(1 + i)^t$$

dove *t* rappresenta il tempo non intero.

Rappresentazione grafica



La funzione ha concavità verso l'alto ed è una funzione sempre crescente. Al crescere del tasso, la curva cresce più rapidamente a parità degli altri fattori.

Formule inverse

Data le complessità della formula, vengono fornite le varie formule inverse scritte in diverse maniere:

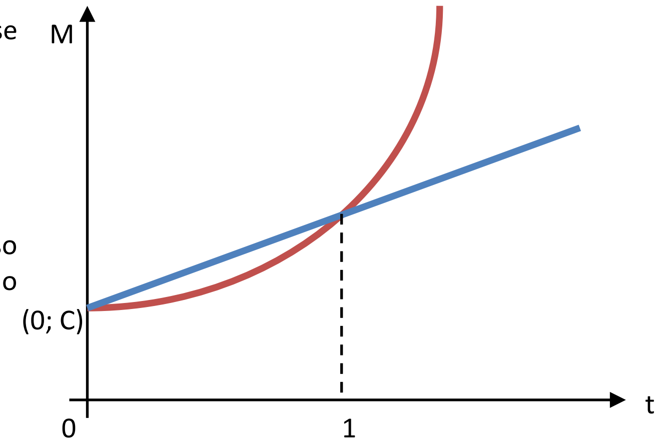
$$M = C(1+i)^t$$

$$C = \frac{M}{(1+i)^t} = M\,(1+i)^{-t}$$

$$i = \sqrt[t]{\frac{M}{C}} - 1 = \left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{t}} - 1$$

$$t = \frac{\log\frac{M}{C}}{\log(1+i)} = \frac{\log M - \log C}{\log(1+i)}$$

Confronto capitalizzazione semplice e composta



Si consideri la formula del montante a interesse semplice e composto:

semplice: $M = C\,(1 + it)$
composto: $M = C\,(1 + i)^t$

con medesimo capitale iniziale e medesimo tasso d'interesse. Le due curve sono uguali quando sussiste la seguente relazione

$C\,(1 + it) = C\,(1 + i)^t$

dalla quale eliminando il capitale si ottiene

$(1 + it) = (1 + i)^t$

Questa relazione ha soluzioni immediate e uniche solo per t = 0 e t = 1, cioè significa che inizialmente il montante è lo stesso, infatti corrisponde al capitale iniziale, e dopo un anno le due curve sono ancora identiche. Dall'analisi del grafico si deduce che **il montante ad interesse semplice è più alto per periodi inferiori all'anno, mentre è più alto quello ad interesse composto per periodi superiori all'anno**.

Capitalizzazione frazionata

Si parla di capitalizzazione frazionata quando la capitalizzazione avviene per periodi che sono sottomultipli dell'anno.

- Capitalizzazione **semestrale**: capitalizzazione ogni 6 mesi (2 volte l'anno)
- Capitalizzazione **quadrimestrale**: capitalizzazione ogni 4 mesi (3 volte l'anno)
- Capitalizzazione **trimestrale**: capitalizzazione ogni 3 mesi (4 volte l'anno)
- Capitalizzazione **bimestrale**: capitalizzazione ogni 2 mesi (6 volte l'anno)
- Capitalizzazione **mensile**: capitalizzazione ogni mesi (12 volte l'anno)

In capitalizzazione frazionata il tasso può essere **periodale** o **annuo nominale convertibile k volte all'anno**.

Per il calcolo del montante in capitalizzazione frazionata, si applicano ancora le formule fondamentali della capitalizzazione, tenendo presente che il tasso e il tempo devono essere riferiti allo stesso periodo.

Tasso periodale

Il tasso periodale è il tasso relativo a un periodo di *1/k* di anno, quindi già riferito al periodo di capitalizzazione e indicato col simbolo i_k.

- i_2 tasso semestrale
- i_3 tasso quadrimestrale
- i_4 tasso trimestrale
- i_6 tasso bimestrale
- i_{12} tasso mensile

Tasso annuo nominale convertibile k volte all'anno

Il tasso annuo nominale convertibile *k* volte all'anno viene indicato con il simbolo j_k e deve essere trasformato in un tasso periodale nel seguente modo

$$i_k = \frac{j_k}{k}$$

Tassi equivalenti

Si dice che due tassi, relativi a differenti periodi di capitalizzazione, sono equivalenti quando, applicati allo stesso capitale e con la stessa durata, danno montanti uguali.

Posto $C = 1$ e $t = 1$, consideriamo il tasso annuo i e il tasso i_k relativo a $1/k$ di anno e supponiamo che diano lo stesso montante

$$1 + i = (1 + i_k)^k$$

Tale relazione d'equivalenza valida per un anno deve sussistere per qualunque durata. Considerando n anni si ha

$$(1 + i)^n = [(1 + i_k)^k]^n$$

È possibile ricavare ora:

- **tasso annuo** i equivalente a i_k dato come

$$i = (1 + i_k)^k - 1$$

- **tasso periodale** i_k equivalente a i dato come

$$i_k = \sqrt[k]{1+i} - 1 = (1+i)^{\frac{1}{k}} - 1$$

SCONTO E VALORE ATTUALE

Definizioni

Una persona che deve riscuotere un certo importo a una data scadenza, può realizzare anticipatamente il suo credito secondo le seguenti modalità:

- **a.** il debitore riscatta il suo debito, cioè lo paga in anticipo, e la somma che paga è inferiore al valore del debito;
- **b.** una terza persona, in genere una Banca, anticipa al creditore l'importo che si farà poi rimborsare dal debitore alla scadenza. In questo caso il creditore cede a un terzo il suo credito, ricevendo, anche in tal caso, un importo inferiore.

Lo **sconto *S*** è il compenso di chi paga un debito prima della scadenza e anche **la differenza sull'operazione di cessione di un credito**.

Legge dello sconto

Il **valore nominale *C***, o **capitale**, indica l'ammontare del credito. Si dice somma scontata, o anche **valore attuale *V***, **il valore nominale diminuito dello sconto**. Per definizione

$$V = C - S$$

da cui

$$S = C - V$$

Sconto-Prestito

Si analizzi la seguente situazione: sono un creditore di una somma C che scadrà al tempo t e cedo a Tizio il mio credito ricevendo oggi V. Tizio incasserà alla scadenza t dal primo creditore la somma C. In altre parole Tizio presta V, che si può considerare come il capitale, e riceve il valore nominale C, che può essere considerato come montante. Dunque **ogni operazione di sconto può essere interpretata come un prestito**.

Se l'operazione di sconto viene interpretata come prestito:

1. a interesse semplice si ha il **regime di sconto razionale** o **semplice**;
2. a interesse composto si ha il **regime di sconto composto**.

Quest'ultimo si usa per operazioni di lunga scadenza. Per quelle di breve scadenza si usa un terzo regime: il **regime di sconto commerciale**.

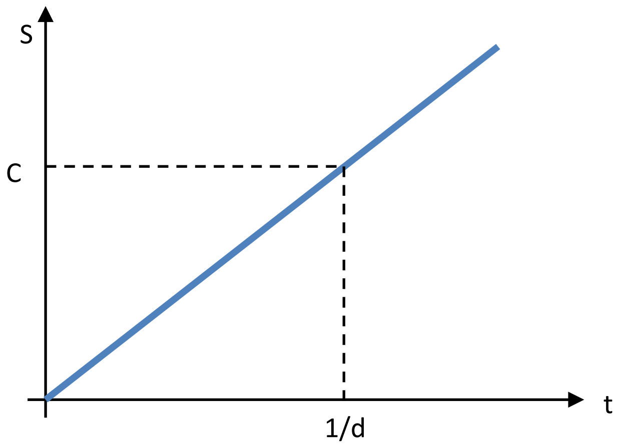
Sconto commerciale

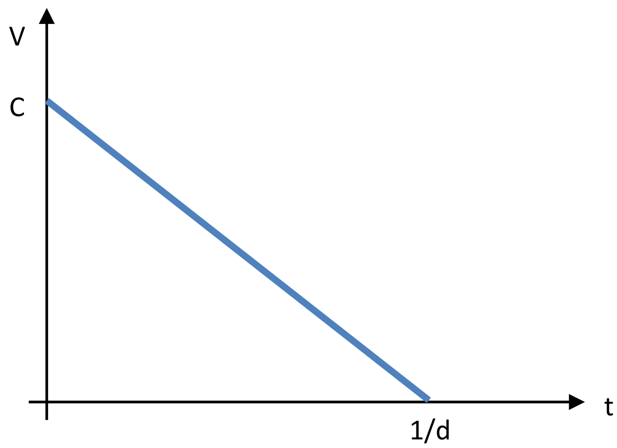
Si ha lo **sconto commerciale** quando lo sconto è **proporzionale al valore nominale *C* e al tempo di anticipazione**. Si fissa di solito il tasso di sconto *d*. Si ha

$$S = C\,d\,t$$

Da cui si ottiene

$$V = C\,(1 - dt)$$





Sconto razionale

Si ha lo **sconto razionale** o **semplice** quando lo sconto viene calcolato **come interesse semplice, al tasso *i*, sulla somma scontata *V* (valore attuale o importo effettivamente prestato)**. Risulta che il valore nominale *C* è il montante a interesse semplice al tasso *i* della somma scontata *V*, quindi

$$C = V\,(1 + it)$$

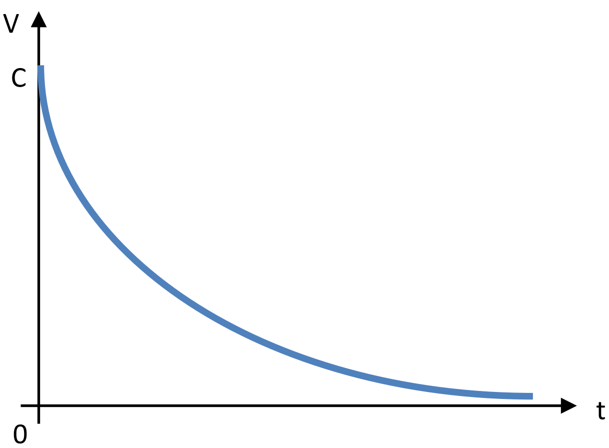
da cui

$$V = \frac{C}{1+it}$$

Con semplici passaggi si ottiene lo sconto

$$S = \frac{Cit}{1+it} = Vit$$

da cui risulta che lo sconto razionale è l'interesse semplice calcolato sul valore attuale V.



Il grafico rappresenta un'iperbole equilatera, avente come asintoti l'asse del tempo e la retta di equazione $t = -\frac{1}{i}$.

Sconto composto

Si ha lo **sconto composto** quando lo sconto viene calcolato **come interesse composto, al tasso *i*, sulla somma scontata *V***. Risulta che il valore nominale *C* è il montante a interesse composto al tasso *i* della somma scontata *V*, quindi

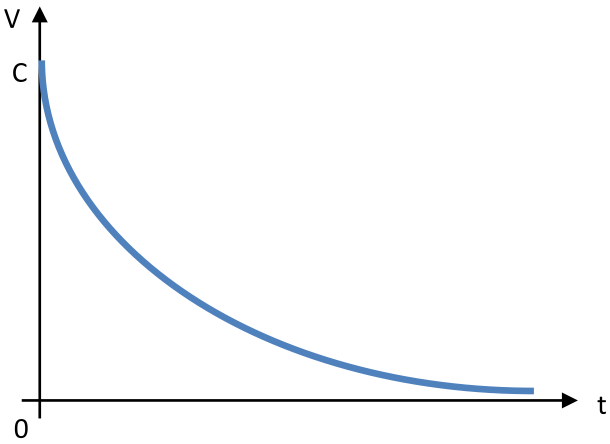
$$C = V(1 + i)^t$$

da cui

$$V = \frac{C}{(1+i)^t} = C(1+i)^{-t} = Cv^t$$

Avendo posto $v = \frac{1}{1+i}$.

Il grafico rappresenta una funzione esponenziale con base minore di 1.



Con semplici passaggi si ottiene lo sconto

$$S = C(1 - v^t)$$

Osservazioni

a. **Valutazioni di somme future**

Il calcolo dello sconto e del relativo valore attuale è utile per valutare importi da pagare o riscuotere in futuro. La valutazione di un credito, non ancora scaduto, sarà sempre minore del valore nominale. Si usa il termine di somma scontata per indicare il prezzo a cui si cede il credito.

b. **Osservazioni sullo sconto commerciale**

Si è detto che nelle operazioni a lungo termine si usa lo sconto composto, mentre a breve termine quello commerciale e razionale. Nella pratica si applica più spesso quello commerciale perché più semplice, anche se a volte conduce a risultati particolari.

1. Usando scadenze lunghe, lo sconto può risultare maggiore del capitale e il valore attuale diventa negativo.
2. La somma prestata nell'operazione è, in realtà, *V* e il compenso o sconto deve essere calcolato su *V*, come nello sconto razionale, e non sulla somma *C*, come nello sconto commerciale; infatti calcolando lo sconto su *C*, questo risulta maggiore e dunque chi acquista il credito ha un compenso maggiore.
3. Chi riscuote la somma scontata, reimpiegando tale importo allo stesso tasso, alla scadenza t non incassa l'importo del credito, ma un importo minore.

c. Tassi di sconto

Ponendo *C = 1* e *t = 1* si ottiene:

sconto razionale: $S = \dfrac{i}{1+i}$

sconto composto: $S = \dfrac{i}{1+i}$

sconto commerciale: $S = d$

Questa relazione esprime lo sconto sul capitale unitario per un anno, cioè il **tasso di sconto**. Il tasso di sconto si indica col simbolo d e quindi

$$d = \frac{i}{1+i} \qquad \text{e} \qquad i = \frac{d}{1-d}$$

Allora, se per lo sconto razionale e composto viene enunciato il tasso d'interesse e poi da questo si ottiene il tasso di sconto, per lo sconto commerciale si enuncia direttamente il tasso di sconto.

d. Confronto fra sconto commerciale e sconto razionale applicando lo stesso tasso

Lo sconto commerciale è maggiore di quello razionale questo perché lo sconto commerciale si calcola su *C* e quello razionale su *V*, che è minore di *C*. Lo sconto commerciale è il montante a interesse semplice, allo stesso tasso e per lo stesso tempo, dello sconto razionale, da cui

Sconto commerciale = Sconto razionale (1 + it)

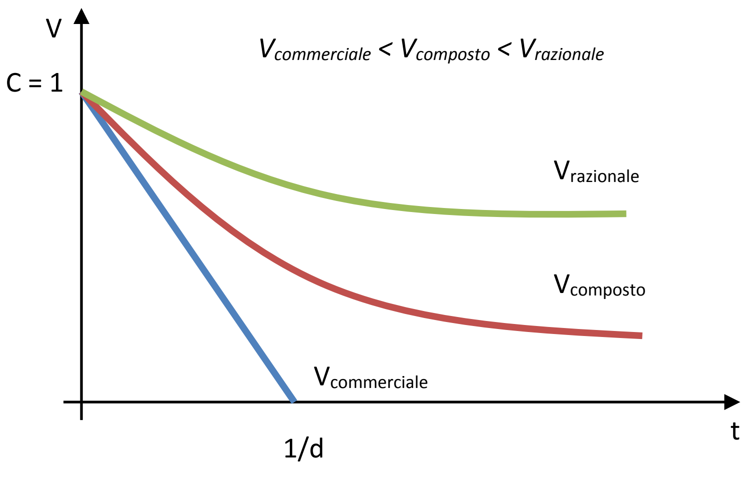
e. Confronto fra grafico di sconti

Confrontiamo i valori attuali supponendo *C = 1*.

$V_{commerciale} = 1 - it$ è lineare in *t*

$V_{razionale} = \dfrac{1}{1+it}$ è una iperbole equilatera

$V_{razionale} = (1+it)^{-t} = v^t$ è una funzione esponenziale con base minore di 1



In conclusione, considerando stesso tasso, stesso tempo e stesso valore nominale, risulta

$S_{commerciale} > S_{composto} > S_{razionale}$

EQUIVALENZA FINANZIARIA E OPERAZIONI COMPOSTE

Scindibilità

Una legge si dice **scindibile** se il montante di un capitale C, impiegato fino a t ad un tasso assegnato i, non varia se l'impiego viene interrotto in t_1, con ($0 < t_1 < t$) e il montante ottenuto in t_1 viene immediatamente reimpiegato alle stesse condizioni per il tempo rimanente $t - t_1$.

Si può dedurre tramite esempi che **in regime di capitalizzazione composta è indifferente trasferire nel tempo un capitale, applicando lo stesso tasso, in una sola soluzione o con più impieghi successivi**. Questa proprietà è detta scindibilità e vale anche in regime di sconto composto.

In conclusione si può affermare che **non sono scindibili l'interesse semplice, lo sconto commerciale e lo sconto razionale**, mentre **sono scindibili l'interesse composto e lo sconto composto**.

Somme equivalenti

Quando **due o più somme, disponibili in tempi diversi, calcolate al tempo 0 con una stessa legge di sconto e allo stesso tasso, risultano uguali**, si dicono **equivalenti**.

In genere si usa lo sconto composto.

Se due somme o insiemi di somme sono equivalenti in capitalizzazione composta, a un certo tasso, coincidono i loro valori attuali al tempo = e i loro valori attuali o montanti calcolati in qualunque epoca.

Unificazione di più crediti

Una persona, disponendo di vari crediti con diverse scadenze, può accordarsi con il debitore o con un terzo per riscuotere i crediti una sola volta.

In questo caso, a causa di ritardi o anticipi nei pagamenti, si dovranno calcolare interessi e sconti e le parti devono giungere a un accordo sul regime da usare.

Premesso che queste operazioni si applicano a crediti a lunga scadenza e che si userà l'interesse composto, è essenziale la scelta del tasso in base al quale verranno trasferiti i capitali nel tempo.

Questi problemi prendono il nome di **unificazione di più crediti** e si dividono in due casi

a) **fissata la data dell'unico pagamento, si determina l'importo (riduzione di più crediti a una data scadenza);**
b) **fissato l'importo dell'unico pagamento, si determina la scadenza (determinazione della scadenza comune).**

Sostituzione di più pagamenti

A volte può essere comodo sostituire i pagamenti a fissate scadenze con pagamenti in altre scadenze.

In questi problemi l'incognita è, in genere, l'importo di un pagamento oppure la scadenza.

Se si hanno vari capitali impiegati a interesse composto, per una stessa durata a tassi differenti, si può pensare di valutare un unico capitale, somma dei precedenti, e determinare il tasso a cui impiegarlo per avere lo stesso montante.

RENDITE

Definizione

Una **rendita finanziaria** è una successione di importi, chiamate rate, da riscuotere (o da pagare) in epoche differenti, chiamate scadenze, ad intervalli di tempo determinati.

Una rendita è quindi individuata da alcuni argomenti tra cui:

- R_k rata da riscuotere (o da pagare) alla scadenza
- t_k scadenza, cioè il momento all'interno del k-esimo intervallo in cui viene riscossa (o pagata) la rata
- n numero di rate totali

Si dice **valore di una rendita**, a una certa data, la somma dei montanti o dei valori attuali, calcolati a quella data, delle varie rate della rendita.

In generale per i calcoli del montante e del valore attuale si usano le formule dell'interesse composto e dello sconto composto.

- Se il valore della rendita viene calcolato in epoca anteriore a tutte le scadenze, o coincidente con la prima di esse, si parla di **valore attuale della rendita**.
- Se il valore della rendita viene calcolato in epoca posteriore a tutte le scadenze, o coincidente con l'ultima di esse, si parla di **montante della rendita**.

Classificazione e casi notevoli

Una rendita può essere classificata in base alle caratteristiche dei suoi argomenti:

numerosità delle rate (durata)

- Se n è un numero finito la rendita si chiama **temporanea**
  - Se n è stabilito a priori ed è indipendente da qualsiasi evento la rendita temporanea si dice **certa**
  - Se invece n non è stabilito a priori e dipende, ad esempio, dall'esistenza in vita di una persona si dice **vitalizia**
- Se n è infinito la rendita si chiama **perpetua** o **illimitata**

periodicità

- Se le scadenze sono separate da un intervallo di tempo uguale la rendita è **periodica**
  - Se il periodo è un anno si parla di **rendite annue**
  - Se il periodo è inferiore a un anno si parla di **rendite frazionate** (es. semestrali, trimestrali, etc.)
  - Se il periodo è superiore a un anno si parla di **rendite poliennali** (es. triennali, quinquennali, etc.)

data di decorrenza

- Se la prima scadenza coincide con la data di decorrenza la rendita è **anticipata**
- Se la prima scadenza cade un periodo dopo la data di decorrenza la rendita è **posticipata**

Inoltre

- Se la prima rata viene riscossa (o pagata) da subito la rendita è detta **immediata**.
- Se la prima rata viene riscossa (o pagata) a cominciare da un certo istante successivo a , la rendita si dice **differita** di un periodo *p*.

Formulario

- $s_{\overline{n}|i}$ indica il montante di una rendita posticipata (valutata quindi all'atto dell'ultimo versamento) e si legge *s* figurato *n* al tasso *i*

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

- $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$ indica il montante di una rendita anticipata (valutata un anno dopo l'ultimo versamento)

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)$$

- Relazioni fondamentali tra i due precedenti tipi di montante

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i} \cdot (1+i) \qquad\qquad \ddot{s}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n+1}|i} - 1$$

- Montante valutato k anni dopo l'ultimo versamento

$$M_k = s_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^k$$

- $a_{\overline{n}|i}$ indica il valore attuale di una rendita immediata posticipata (valutata un anno prima del primo versamento)

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

- $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ indica il valore attuale di una rendita immediata anticipata (valutata all'atto del primo versamento)

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{n}}{i} \cdot (1+i)$$

- Relazioni fondamentali tra i due precedenti tipi di valore attuale

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)$$

- ${}_{p}/a_{\overline{n}|i}$ indica il valore attuale di una rendita differita di *p* anni e posticipata (valutata *p+1* anni prima del primo versamento) e si legge *a* differito *p* figurato *n* al tasso *i*

$${}_{p}/a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^{-p}$$

- ${}_{p}/\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ indica il valore attuale di una rendita differita di *p* anni e posticipata (valutata *p+1* anni prima del primo versamento)
Formula identica alla precedente sostituendo il valore attuale posticipato con quello anticipato

- Relazioni fondamentali tra i due precedenti tipi di valore attuale

$${}_{k}/\ddot{a}_{\overline{n}|i} = {}_{k-1}/a_{\overline{n}|i}$$

- $a_{\overline{\infty}|i}$ indica il valore attuale di una rendita immediata posticipata perpetua

$$a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i}$$

- $\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}$ indica il valore attuale di una rendita immediata anticipata perpetua

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i} + 1$$

- Relazioni fondamentali tra i due precedenti tipi di valore attuale

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = a_{\overline{\infty}|i} + 1$$

- ${}_{p}/a_{\overline{\infty}|i}$ indica il valore attuale di una rendita posticipata perpetua differita di *p* anni

$${}_{p}/a_{\overline{\infty}|i} = \frac{(1+i)^{-p}}{i}$$

- Relazioni fondamentali tra il valore attuale e il montante

$$a_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^{-n} \qquad s_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^{n}$$