

数学教学新帮手

——动态数学软件 GeoGebra

曹一鸣，郭衍（北京师范大学数学科学学院）

摘要：动态数学软件 GeoGebra 为每个人带来充满活力的数学，帮助设计有趣的代数、几何、统计和微积分教学。本文介绍了 GeoGebra 的可视化、多重表征和帮助实验探索的特点，能支持从小学算术到大学高等数学教学。这款免费的开源软件带来的新思维与新技术必将引起课堂教育技术的重大变革，实可谓数学教学的新帮手。

关键字：GeoGebra 动态数学 可视化 多重表征 实验探索 教育技术

1 引言

提到数学软件，很多人会想到 Maple、Matlab 等，这些软件在专业领域都可谓是功能强大，如 Maple 擅长符号计算，Matlab 则专于矩阵运算，而这些专业软件往往开发的指向性单一，两者都不具备演示功能，所以不能直接用于数学教学。另外大家可能会想到在中学几何教学中数见不鲜的几何画板，这是一款优秀的几何教学演示软件，但其功能主要是教学演示，而且仅限于在平面几何教学的使用。

那么有没有一款既能用于学习研究，又能用于教学演示；既能胜任基础数学，又能担当高等数学的功能齐全的教学软件呢？动态数学软件 GeoGebra 在这方面有了突破性的发展。顾名思义，“动态”说明软件具有动态特性，具备演示功能；而 GeoGebra 这个名称由 geometry（几何）和 algebra（代数）两词组合而成，GeoGebra 兼备几何、代数、统计、微积分等功能，其在几何方面的表现就几乎覆盖了几何画板的所有功能，在某种程度上还超越了几何画板传统意义上的动态几何概念，是一款具有功能全、跨平台、易操作等特点的动态数学软件。

2 GeoGebra 简介

GeoGebra 是一款全免费的开源软件，支持多平台，已经被翻译成了 58 种语言。从 2001 年发展至今，GeoGebra 在欧洲及美国获得过数十项教育软件大奖，已被 190 多个国家的教育工作者所使用，有 30 多个国家将 GeoGebra 写入教科书。仅 2010 年一年，软件下载量已逾 380 万。

GeoGebra 支持几何、代数、统计、微积分等功能，几乎覆盖整个数学教学领域。

图 1 就是 GeoGebra 软件截图，软件功能区域分为：代数区、绘图区和电子表格（在新的测试版中还有第二绘图区、CAS 区和触控键盘等区域，方便在平板电脑等手持设备上使用）。这三个区域相互关联，并不是为了拓展软件功能而拼凑在一起的独立个体。

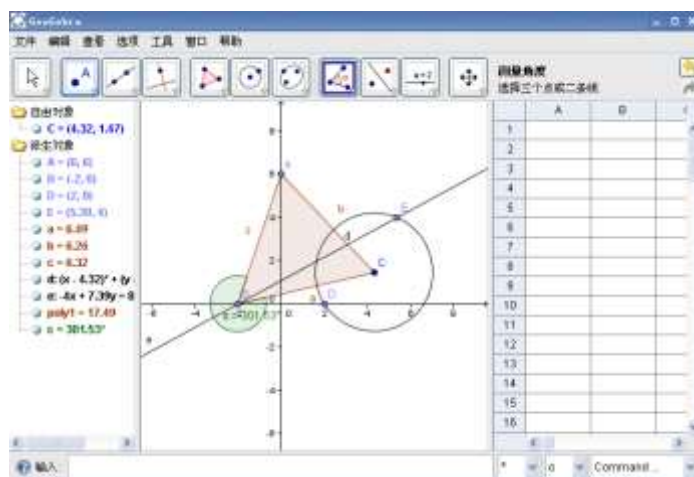


图1. GeoGebra 软件界面截图

在绘图区中可以使用绘图工具很方便的绘制点、线、多边形、圆锥曲线等，还可以通过修改属性调整对象的颜色、粗细和样式等，使得构图更加美观。除了绘图工具外，GeoGebra 还具备测量、逻辑判断、动画等功能，选定相应工具，点击一下鼠标就可以方便的测量出线段长度、图形面积、角度；利用复选框，通过逻辑运算，可以控制图形是否显示，在什么状态下显示；利用滑杆工具，可以控制图形手动或自动变化。

在绘制每个图形的同时，代数区中都会生成一个相应的代数表达式，修改几何对象则代数表达式也会跟着改变；同样，修改代数表达式，相应的几何对象也会随之改变。此外，还可以通过在命令框中输入命令，直接生产代数和几何对象。值得一提的是命令输入是支持 LaTeX 语法的。在即将发布的 GeoGebra 4.2 版中，新增了更完善、更易于操作的 CAS（计算机代数系统，此前版本已有，但置于后台运行），可以方便的进行符号运算，如：求微分、求积分、分解因式、解方程等，软件的代数功能变得更为强大。

电子表格功能类似 Excel，录入数据后，可以根据需要在左侧生成一系列的统计图表，甚至可以利用电子表格中的两列数据描点，在绘图区进行拟合，在代数区得到回归方程。这些功能的实现，仅需点点鼠标即可完成。

GeoGebra 还成立了专门的机构以支持教师培训、教学经验分享以及科研工作。其总部国际 GeoGebra 学院（International GeoGebra Institute）设在欧洲，全球已有 60 多个 GeoGebra 学院。2011 年 5 月，北京师范大学成立了北京师范大学 GeoGebra 学院（中国总部），该学院致力于 GeoGebra 相关的数学教学研究，颁发中国 GeoGebra 用户水平认证，提供师范生和在职教师培训，分享数学学习与教学的成功案例和先进经验，促进中国各地方学院间的合作与交流。

此外，使用者还可以通过 GeoGebra 维基分享教学案例，通过用于论坛寻求帮助，如果英文水平较好，还可以获得软件设计研发人员的亲自指导。

3 GeoGebra 的特点

3.1 可视化

GeoGebra 可以使数学的推理演绎过程可视化，让学生们可以“看到”抽象的概念。

抽象的符号往往是学生数学学习的重大障碍，在接触抽象概念时，大部分学生可能都一时半会接手不了，有的可以通过教师讲解逐步理解，有的通过习题逐渐巩固，但是有的学生

可能只是留下了一个形式化的记忆，似懂非懂，似是而非。

美国当代著名教育心理学家 Richard E.Mayer 指出，基于计算机的多媒体学习环境由图像和文字等组成，为发展学生的理解能力提供了一种具有潜在优势的有力工具^[1]。

一方面，教师在绘制图形的过程就是一个动态展示的过程。和传统的幻灯片直接呈现相比，学生们看到的不是结果，而是过程。教师在黑板上画图，虽然能够展示过程，但是却不如计算机作图准确、方便。另一方面，GeoGebra 还提供了动画功能，通过滑杆可以在绘图区中实现一个变量、多个变量或者角度的动画效果。此外，还可以通过手动修改或者利用键盘方向键实现手动变化效果。

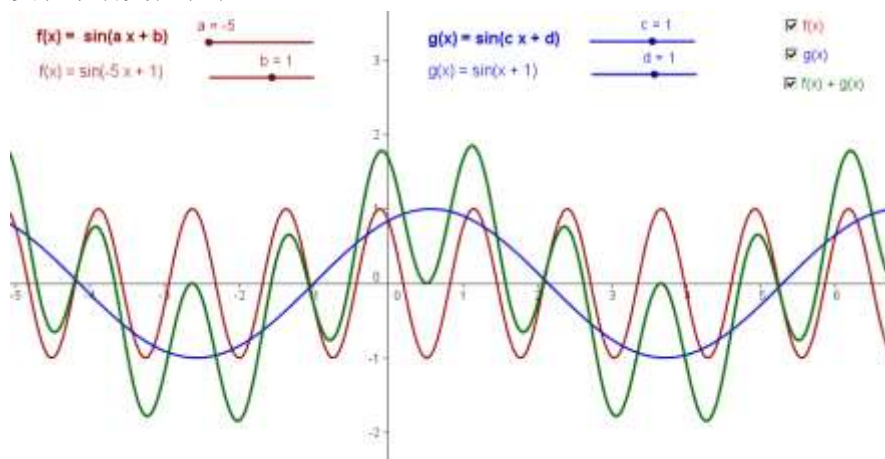


图2. 可视化参数教学案例

图 2 展示的是一个由两个函数加和成新函数的教学案例，通过 GeoGebra 制作的课件，使得参数变化和函数图像变化都变得可视化。如果只勾选 $f(x)$ ，那么绘图区将只显示 $f(x)=\sin(ax+b)$ 的函数图像。通过滑杆改变 a 和 b 的值，学生可以很直观的看到函数图像发生的变化，这不但使得正弦函数周期和相位的变化形象直观，而且大大简化了教师的作图工作。如果勾选 $f(x)+g(x)$ 将可以看到两个正弦函数图像的叠加效果，这不仅可以作为数学可视化参数的教学案例，也是一个物理中声音叠加的实验模型。

3.2 多重表征

GeoGebra 能帮助学生把多重表征联系起来。

表征是现代认知心理学的重要概念，指的是某一对象的内部表达，所以有时也成为内部表征。人们对某一对象的理解可以有多重的内部表征，当学生接受一个新的数学内容时，或在行动中体验内容、或以图像表示内容、或以语言描述内容，不同表征有其特殊的表达功能，如：图像表征能够传达直观信息，符号表征能够传达抽象信息……每种表征都能加深对数学概念的内化。但是学生习得新知识时，对于各种表征往往只有松散的组合，不能把它们连接起来，教师连接各个表征的教学是帮助学生学习的主要方式^[2]。计算机能够提供相联系多重外部表征，进而帮助形成能够建立关联的内部表征，所以经过合理设计的多媒体材料是促进学生建立多重表征间联系的理想环境。

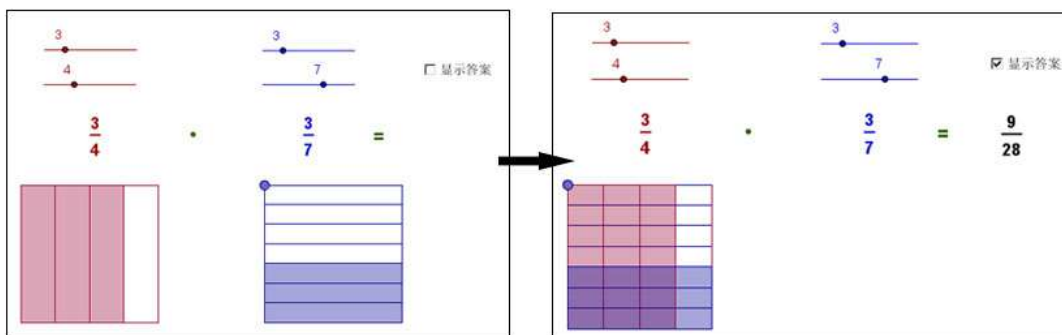


图3. 分数乘法教学案例

图3所示的分数乘法的教学案例，通过调整滑杆可以更改两分数的值，勾选“显示答案”可以选择显示答案，点击拖动右侧方块左上方的点可以移动该方块与左侧方块重合。在这个教学案例中，既有代数表达式也有图形表示，通过移动图形计算重叠面积可以帮助理解分数乘法的概念，勾选显示答案可以验证猜测，调整滑杆还能生出其他数值的例子，可谓将多重外部表征有机整合，将助于学生连接内部表征。

3.3 实验探索

GeoGebra 不但是教师演示软件，同样也是学习软件。GeoGebra 的动态数学功能可以帮助学生做一些探索与尝试。

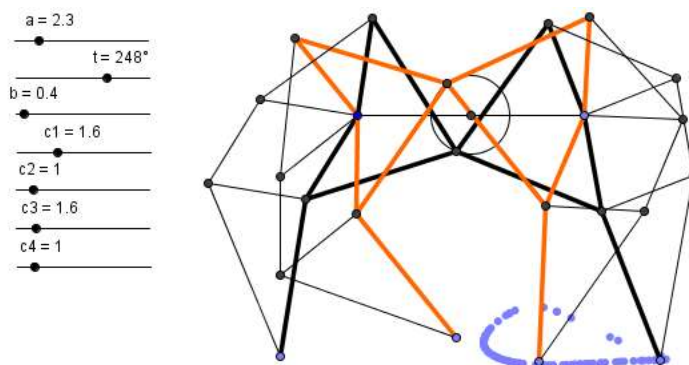


图4. 泰奥·杨森的海滩机械怪兽

图4所示的是泰奥·杨森的海滩机械怪兽模型^[3]。海滩机械怪兽由塑料管制成，它不依靠化学燃料，只要有风，这只怪兽就能在海滩上行走。这只机械怪兽完全依托机械原理设计而成，没有任何的电子设备。相信即便是数学或是物理专业的大学生也没法再短时间内看明白这个设计奇巧的“怪兽”吧。

在传统教学条件下，了解这样一个复杂的机械，可以要先画图、制作模型、实物检验等一系列步骤，费时费力，学生多半会望而却步。而利用 GeoGebra 制作模拟模型，学生不但可以从“怪兽”的行走中了解机械结构原理，甚至还可以通过调整滑杆来调试机械，改变部件的大小、位置，绘制行进轨迹，每一步的修改都可以即时呈现在动态模型上，从而将模型调整的最佳状态。在 GeoGebra 的支持下，一个中学生就足以胜任这样一个在传统教学环境下连大学生都觉得复杂的工作。创造不是来自于机械的训练，而对新问题的探寻，其中技术可以成为学生探索、发现和登上数学与科学高峰的“云梯”^[4]。可以说动态数学软件 GeoGebra 为培养学生的创新精神和探索能力提供了技术支持和智力保障。

4 GeoGebra 的适用范围

GeoGebra 支持从小学算术到高等数学，小到 6 岁的小学生，大到 20 岁以上的大学生，GeoGebra 都有其用武之地。当然，如果算上教学工作者，适用的年龄访问就更广了。针对小学数学教育，GeoGebra 还推出了 GeoGebraPrim（小学版），这个版本只保留了一些简单的绘图工具，不但方便小朋友使用，而且对硬件的配置要求很低，大大降低了设备成本。

下面就举例说明 GeoGebra 的适用范围：

4.1 小学算术

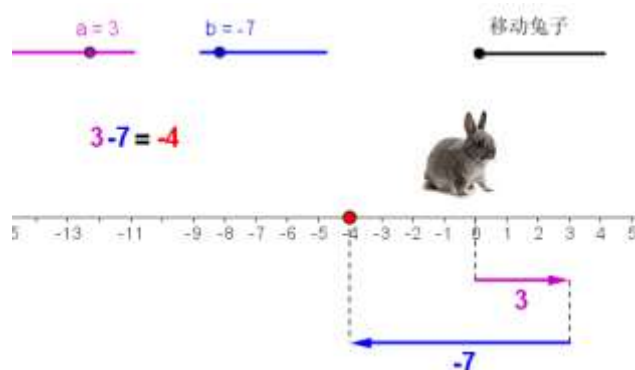


图5. 整数减法教学案例

在整数减法中，当减号右边的数大于左边，也就是说差为负数时，常常是学生学习的一个难点。不少学生可能无法理解减完了怎么还能再减这样一个问题。图 5 所示是一个整数减法的教学案例。使用滑杆可以改变 a 和 b 的值来得到减法式，教师可以通过前进三步再后退七步等于后退四步这个一个过程来讲解图中的减法算式 $3 - 7 = -4$ 。利用“移动兔子”滑杆，可以生的展现一只兔子的移动过程，使学生对应差为负数有一个形象直观的理解。

相信不少教师在教授这样的减法算式时也会想到运用前进后退的概念，但是动画的演示远比语言讲解的效果对于小学生的理解要方便得多。而且，使用 GeoGebra 制作这样的生动有趣的课件还用不了 5 分钟的时间。

4.2 箱式图

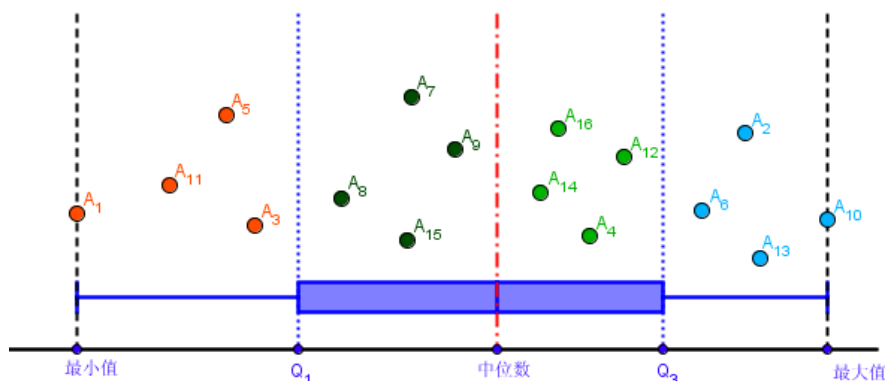


图6. 统计教学案例箱式图

图 6 所示是统计教学中的一个箱式图的教学案例，数据由电子表格录入。根据预设的模型，输入数据后即可得到最大值、最小值、中位数和两个四分位数。利用箱式图可以方便地进行多组数据平均水平和变异程度的直观分析比较，观察数据的分布形态。

相比于 Matlab 的统计工具箱，GeoGebra 生成的箱式图更为简单方便，省却了复杂的命令输入。通过修改电子表格中的数据或者利用鼠标移动某一数据点，箱式图即可随之改变。这种即时的演示效果和方便的操作相比于复杂的统计软件更加有利于课堂教学。

4.3 微积分

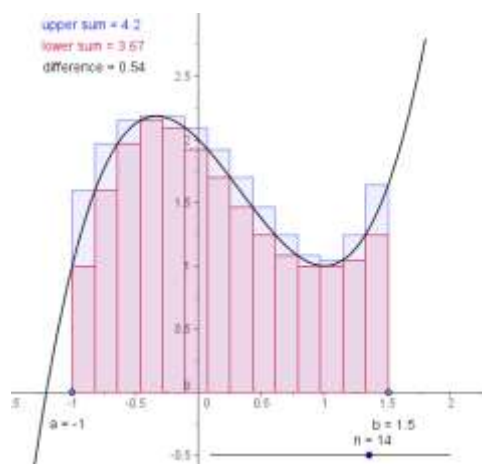


图7. 微积分教学案例

微积分中的极限概念常常是高等数学中的一个难点，其实也并不是因为知识点本身的难度，而是在接触极限概念之前，学生们自小学到高中以来的数学学习中没有相关的知识基础，习惯了计算都能得到准确值的学生们通过抽象想象往往很难理解“趋近而又达不到”的这样一种状态。既然学生无法通过想象完成这一概念的理解，教师就应该通过其他手段辅助学生的直观想象，帮助他们理解好“极限”这块高等数学的入门砖。

如图 7 所示，是用 GeoGebra 制作的一个微积分教学的课件，通过移动滑杆， n 值逐渐变大， -1 和 1.5 之间分个的条数增多，上和和下和的值越来越接近。这样的一个动态过程不但能帮助大学生理解微积分，如果运用得当甚至可以帮助中学生构建微积分思想，为高等数学学习奠定良好基础。

5 后记

GeoGebra 为每个人提供充满活力的数学，同时也为每个人提供了更快乐、更方便的数学教与学。GeoGebra 不止是一个软件，提供免费的教育技术；GeoGebra 是一个团队，培训交流，团结协作；GeoGebra 更是一种分享的精神，已建立起了一个超过 15000 个教学案例的在线资源库，www.geogebra.org 官方网站提供免费下载，北京师范大学 GeoGebra 学院（中国总部）已经建立了文件镜像服务器，方便中国用户下载。

与动辄 90 多兆的几何画板相比，GeoGebra 不到 5 兆的身材绝对称得上是轻量级了。但是体积小并不意味着功能少，动态几何功能自不必说，GeoGebra 的计算代数系统、命令输入、电子表格等都在功能覆盖上全面超越了几何画板，突破了传统“动态几何”软件的概念，是一款“动态数学”软件。同时，触控版的 GeoGebra 已在测试中，不久就可在平板电脑、智能手机等其他手持设备上运行，将为人们带来更方便快捷的数学教学。

参考文献

- [1] Mayer R E. Multimedia learning[J]. Psychology of Learning and Motivation, 2002, 41.
- [2] Schwarz, Nathan, Resnick. International perspectives on the design of technology supported learning environments[M]. NJ: Lawrence Erlbaum, 1996.
- [3] Jansen T. Theo Jansen's strandbeest[Z]. 2011.
- [4] 曹一鸣. 让技术成为学数学用数学的“云梯” [J]. 中国电化教育, 2010, (5).