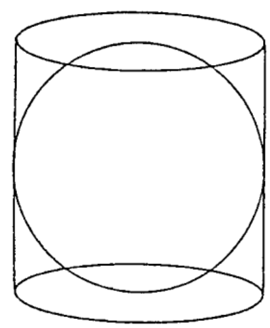
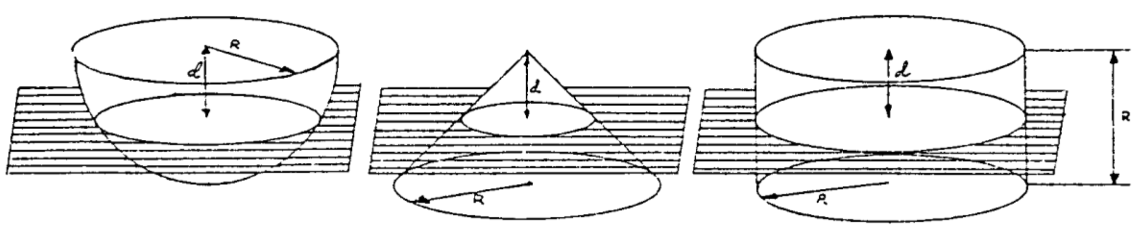
Volumen de una Esfera

El cálculo del volumen de la esfera fue uno de los descubrimientos que Arquímedes más estimaba de todos los muchísimos que hizo en su vida. Llegó a demostrar de un modo muy original que el volumen de la esfera es igual a dos tercios del volumen del cilindro circular circunscrito a ella. Tanto le impresionó esto a él mismo que mandó que en su tumba se grabase esta figura en recuerdo de la mejor de sus ideas.

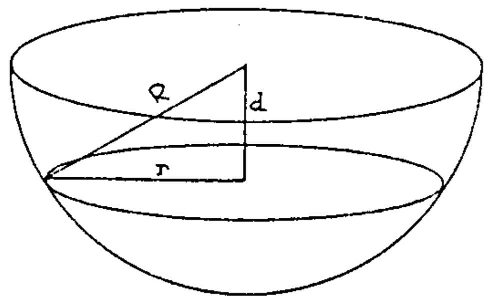


Vamos a ver cómo llegó hasta ahí. Arquímedes se imaginó una semiesfera y junto a ella un cilindro circular recto y un cono recto, ambos de base igual a un círculo máximo de la semiesfera. Algo así

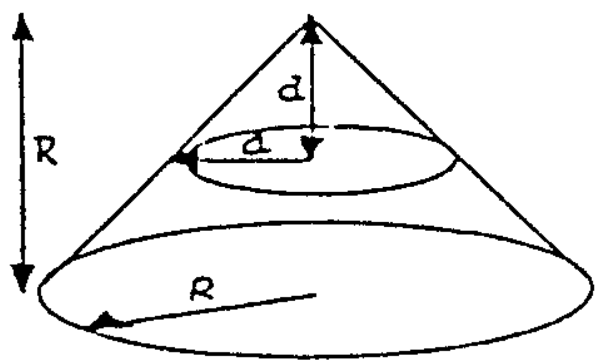


Arquímedes cortó las tres figuras por un plano paralelo a la base del cilindro y cono y se preguntó cómo serían las secciones determinadas por este plano en cilindro, semiesfera y cono.

En el cilindro está claro: un círculo de radio R. En la esfera también será un círculo, pero su radio dependerá de la distancia d. Mirando la figura siguiente y acordándote del teorema de Pitágoras, fácilmente puedes escribir que si el radio de la sección es r, entonces $r^2 + d^2=R^2$.



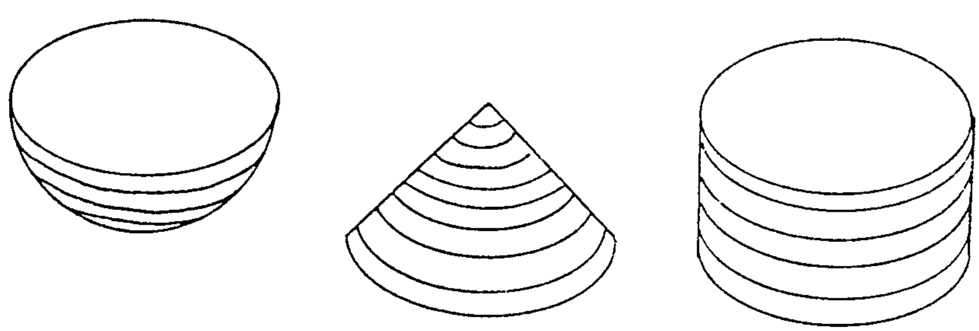
En el cono la sección también será un círculo y ahora el radio es aún más fácil de determinar mirando a la figura siguiente



Como el radio de apertura del cono es de 45º, resulta que el radio es d. Así

Sección cilindro = $\Pi R^2 = \Pi(r^2 + d^2) = \Pi r^2 + \Pi d^2$ =Sección semiesfera + Sección cono

Las secciones son como rebanadas de las tres figuras obtenidas cortando paralelamente a la base del cilindro. Resulta que, colocando las tres figuras como las hemos puesto y cortándolas en rebanadas finas



Rebanada en cilindro a altura d = Rebanada en semiesfera + Rebanada en cono. Si para cada altura d se tiene esta relación, parece bastante claro que

Volumen cilindro = Volumen semiesfera + Volumen cono

Pero, como Arquímedes muy bien sabía,

Volumen cilindro= ΠR^3;
Volumen cono= $\Pi R^3/3$ y así resultaba
Volumen semiesfera = $2\Pi R^3/3$ y Volumen esfera = $4\Pi R^3/3$.

Cuando Cicerón fue nombrado cuestor en Sicilia (75a. de C.), descubrió, gracias a la inscripción que Arquímedes había mandado grabar, la tumba de Arquímedes que sus paisanos de Siracusa habían perdido de vista. Cicerón la restauró, pero más tarde se volvió a perder. Hace unos pocos años se encontraron dos tumbas que se disputan la autenticidad...

La esfera puede considerarse como compuesta por un montón de pirámides de vértice el centro de la esfera y base de área muy pequeña S sobre la esfera. Esto da una idea de lo que puede valer el área de la superficie esférica. El volumen de la esfera es $4\Pi R^3/3$. El de cada pirámide será RS/3 (pues la altura de cada pirámide es R). Sumando todas las pirámides y sacando R/3 factor común resulta

$4\Pi R^3/3$ = Volumen esfera = Suma volúmenes pirámides = Area esfera x R/3 y así
Area esfera = $4\Pi R^2$