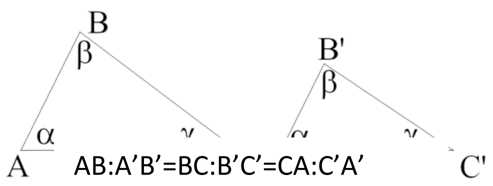
Goniometria II parte

Funzioni goniometriche: seno, coseno tangente

Ricordiamo che:

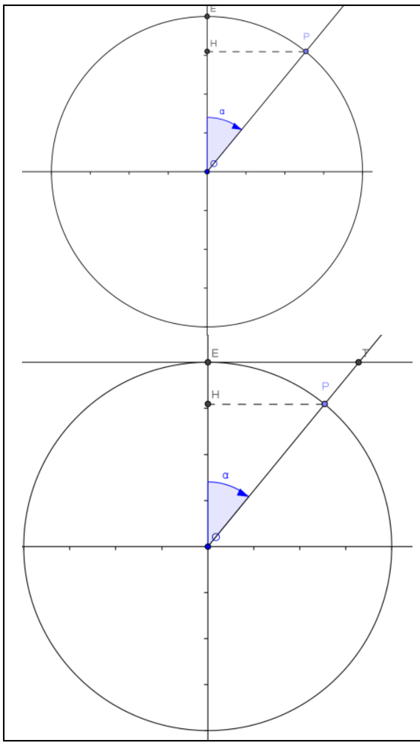
Due **triangoli** si dicono **simili** se hanno gli angoli ordinatamente uguali e i lati omologhi (nel caso dei triangoli i lati opposti agli angoli) in proporzione.

([1])



Prime definizioni: seno, coseno, tangente

Consideriamo in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, una circonferenza con centro nell'origine e raggio r arbitrario. Una qualunque semiretta uscente da O definisce con il semiasse positivo delle ordinate un angolo orientato α; tale semiretta incontra la circonferenza in un punto P di coordinate $P(x_P, y_p)$ che rappresentano le misure dei segmenti orientati $\overrightarrow{HP}, \overrightarrow{OH}$



Definiamo **seno** dell'angolo α, e scriveremo $\sin(\alpha)$, il rapporto tra l'ascissa del punto P e la misura r del raggio

$$\sin(\alpha) = \frac{x_P}{r}$$

Definiamo **coseno** dell'angolo α, e scriveremo $\cos(\alpha)$, il rapporto tra l'ordinata del punto P e la misura r del raggio

$$\cos(\alpha) = \frac{y_P}{r}$$

Consideriamo ora la retta tangente alla circonferenza nel punto E, la semiretta OP incontra la retta in T (x_T, r)

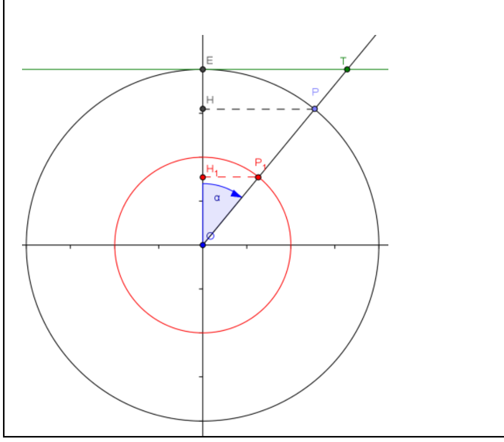
Definiamo **tangente** dell'angolo α, e scriveremo $\tan(\alpha)$, il rapporto tra l'ascissa del punto T e la misura r del raggio

$$\tan(\alpha) = \frac{x_T}{r}$$

Proposizione T*ali definizioni non dipendono dal raggio della circonferenza*.

[1] Esistono dei **criteri** per vedere se due triangoli sono simili (ovvero non è necessario controllare che tutti gli angoli siano uguali e che tutti i lati siano in proporzione):

- **1° criterio**: *due triangoli sono simili se hanno gli angoli ordinatamente uguali*
- **2° criterio:** *due triangoli sono simili se hanno un angolo uguale e i lati che lo comprendono in proporzione*
- **3° criterio:** *due triangoli sono simili se hanno i lati ordinatamente in proporzione.*



Per dimostrare questo basterà considerare una seconda circonferenza di raggio r' e ripetere la costruzione.
I triangoli OHP e OH_1P_1 sono simili (poiché hanno angoli congruenti) e quindi i lati sono in proporzione, pertanto
$HP:r = H_1P_1:r' \rightarrow \frac{HP}{r} = \frac{H_1P_1}{r'} = \sin(\alpha)$

Possiamo ripetere questo ragionamento anche per le altre definizioni.

Dalla proposizione ricaviamo:

- La definizione di seno, coseno e tangente dipende solo dall'angolo
- Per semplificare i calcoli possiamo assumere come circonferenza quella con raggio unitario (r=1).

Definiamo **circonferenza goniometrica** la circonferenza di raggio 1

Vedi foglio geogebra http://www.geogebra.org/material/simple/id/33064

Riformuliamo la definizione:

Si consideri il punto P sulla circonferenza goniometrica, tale che l'angolo individuato dal semiasse positivo delle ordinate e la semiretta per OP coincida con α (con orientamento del piano in senso orario)

Definiamo **seno** dell'angolo α, e scriveremo $\sin(\alpha)$, l'ascissa del punto P $\sin(\alpha) = x_P$

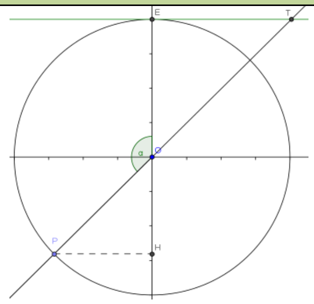
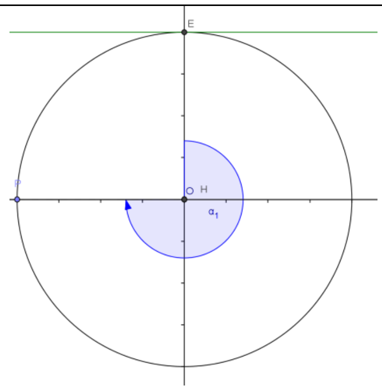
Definiamo **coseno** dell'angolo α, e scriveremo $\cos(\alpha)$, l'ordinata del punto P $\cos(\alpha) = y_P$

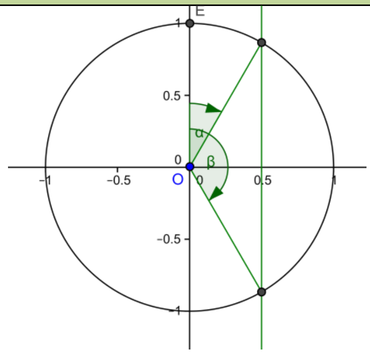
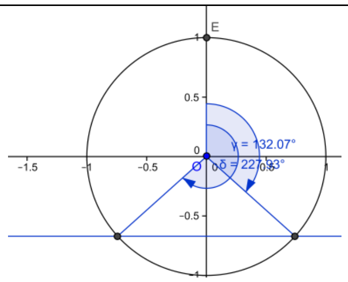
Definiamo **tangente** dell'angolo α, e scriveremo $\tan(\alpha)$, l'ascissa del punto T $\tan(\alpha) = x_T$

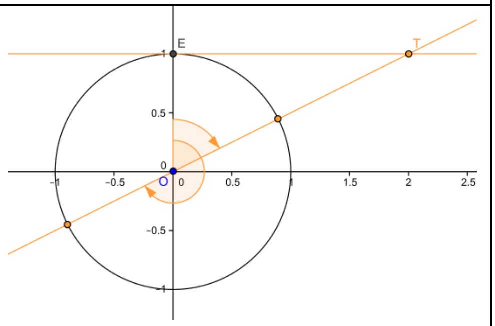
Osservazioni:

1) Il seno e coseno di un angolo può essere anche definito a partire da un triangolo rettangolo considerando il rapporto tra il cateto opposto (o adiacente) all'angolo e l'ipotenusa. Tali definizioni:
   a. Sono ricavabili, come proprietà, da quelle date sopra.
   b. Propongono alcuni problemi nel caso di angoli maggiori di $\frac{\pi}{2}$ e ancor più per angoli maggiori di un angolo giro.
2) Il seno, il coseno e la tangente di un angolo sono rapporti tra segmenti orientati e pertanto:
   a. Sono numeri puri (senza dimensioni)
   b. Sono numeri reali, positivi o negativi (il segno dipende dal segno dell'ascissa o ordinata di P)
3) Al variare dell'angolo, variano le coordinate del punto P sulla circonferenza e del punto T sulla tangente.
4) Al variare di α corrisponde uno e un solo valore del seno, coseno e tangente.

Quest'ultima osservazione ci porta a pensare di definire delle delle **funzioni** che associno ad ogni angolo il corrispondente valore del seno, del coseno e della tangente. Tali funzioni le chiameremo **goniometriche**

Esempio 1 Ricaviamo graficamente il seno, coseno e tangente di un assegnato angolo α		
$\alpha = -\frac{3}{4}\pi$	• L'angolo ha misura negativa e pertanto è orientato in senso antiorario. • Individuiamo sulla circonferenza goniometrica il punto P ad esso associato. • L'ascissa di P rappresenta il valore del *seno*, l'ordinata quella del *coseno*. • Osserviamo che entrambi i valori saranno negativi • Per rappresentare la tangente dobbiamo prolungare OP fino ad individuare T sulla tangente alla circonferenza. • L'ascissa di T rappresenta la *tangente*.	
$\alpha = \frac{3}{2}\pi$	• L'angolo ha misura positiva e pertanto è orientato in senso orario. • Individuiamo sulla circonferenza goniometrica il punto P ad esso associato. Che coinciderà con (-1,0) • L'ascissa di P rappresenta il valore del *seno*, l'ordinata quella del *coseno*. • Non esiste invece il punto T e quindi il valore della *tangente*, poiché OP e la retta tangente alla circonferenza sono paralle.	

Esempio 2 Dati i seguenti valori del seno, coseno e tangente di un angolo α, disegniamo α		
$\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$	• Disegniamo la circonferenza goniometrica e ricordando che il seno di un angolo coincide con l'ascissa del punto P, individuiamo sull'asse x il segmento della misura indicata • Tracciamo da tale punto una retta parallela all'asse y e determiniamo le intersezioni sulla circonferenza goniometrica • Congiungiamo tali intersezioni con O • Restano così individuati due angoli il cui seno è proprio quello richiesto	
$\cos(\alpha) = -\frac{2}{3}$	• Disegniamo la circonferenza goniometrica e ricordando che il coseno di un angolo coincide con l'ordinata del punto P, individuiamo sull'asse y il segmento della misura indicata • Tracciamo da tale punto una retta parallela all'asse x e determiniamo le intersezioni sulla circonferenza goniometrica • Congiungiamo tali intersezioni con O	

	• Restano così individuati due angoli il cui coseno è proprio quello richiesto	
$\tan(\alpha) = 2$	• Disegniamo la circonferenza goniometrica e ricordando che la tangente di un angolo coincide con l'ascissa del punto T, individuiamo sulla tangente alla circonferenza goniometrica il punto che ha ascissa uguale alla misura indicata • Tracciamo una retta per O e per tale punto, che incontrerà la circonferenza in due punti • Congiungiamo tali intersezioni con O • Restano così individuati due angoli la cui tangente è proprio quella richiesta	

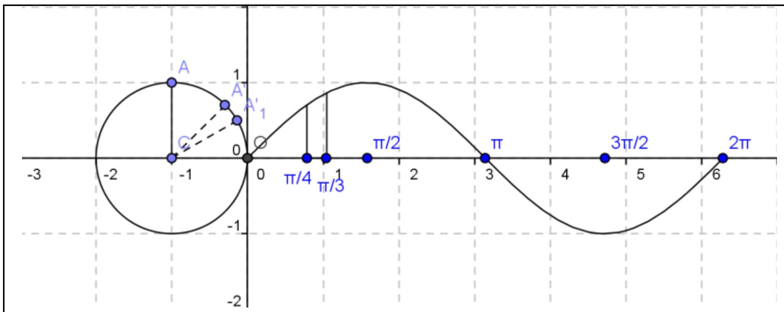
Con riferimento a questo esercizio, vedere foglio geogebra
http://www.geogebra.org/material/simple/id/33062 ne costruiremo uno insieme nel proseguo

La funzione seno, coseno e tangente

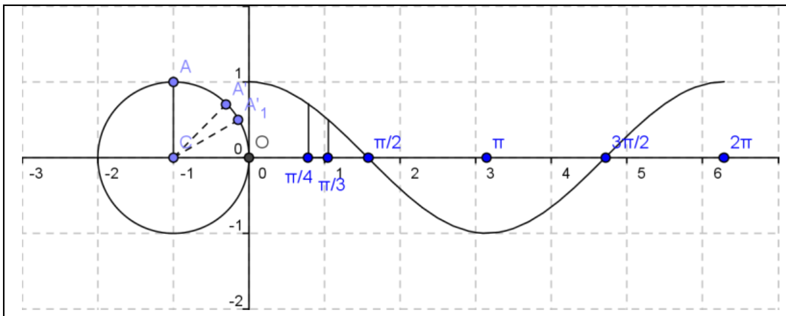
Riconsideriamo quanto detto nelle ultime osservazioni precedenti: *possiamo associare ad ogni angolo α il valore del seno o del coseno di α e tale valore è unico.*

Aiutiamoci con un foglio Geogebra http://ggbtu.be/m2955769 ; fissiamo un sistema di assi cartesiani ortogonali e sull'asse x riportiamo la misura dell'angolo α in radianti e sull'asse y, ad esempio, il seno o il coseno dell'angolo. Al variare dell'angolo otteniamo due grafici di funzione: **sinusoide e cosinusoide.**

$$y = \sin(x)$$

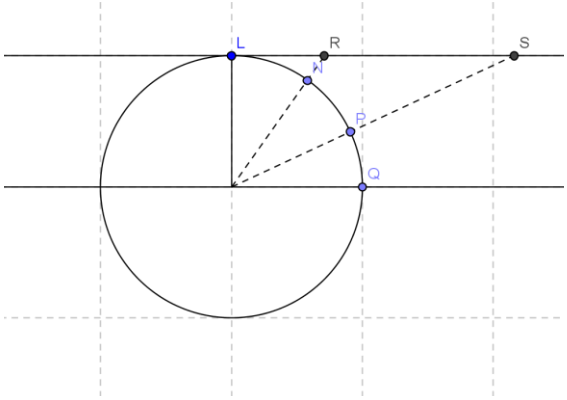
	Poiché sin(x) è funzione periodica il diagramma completo si ottiene ripetendo un numero illimitato di volte. **Dominio=** $\mathbb{R} =]\infty; +\infty[$ **Codominio** $[-1; +1]$ Poiché $\sin(-x) = -\sin(x)$ la funzione è dispari **Periodica** $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ di *periodo* 2π

$$y = \cos(x)$$

	Poiché cos(x) è funzione periodica il diagramma completo si ottiene ripetendo un numero illimitato di volte. **Dominio=** $\mathbb{R} =]\infty; +\infty[$ **Codominio** $[-1; +1]$ Poiché $\cos(-x) = \cos(x)$ la funzione è pari **Periodica** $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ di *periodo* 2π

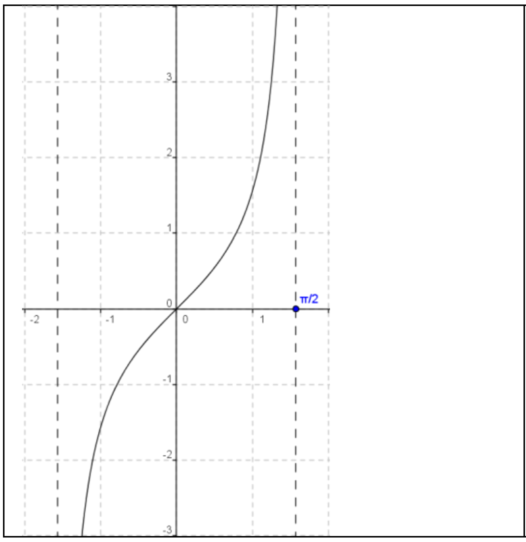
$y = \tan(x)$

Per il grafico della tangente occorre ricordare la definizione di tangente dell'angolo α data sulla circonferenza goniometrica:



Si considera la retta tangente alla circonferenza nell'origine dell'angolo (L in figura)
La tangente dell'angolo $L\hat{O}N$ si ottiene considerando il prolungamento del lato dell'angolo e individuando il punto R intersezione tra tale prolungamento e la retta tangente. La tangente dell'angolo è il segmento orientato LR (orientato=con segno). Si osservi che, ad esempio per l'angolo $\frac{\pi}{2}$ le due rette non si intersecano e quindi non esiste la tangente.

Da questa definizione di tangente possiamo ricavare il grafico della curva, detta **tangentoide**



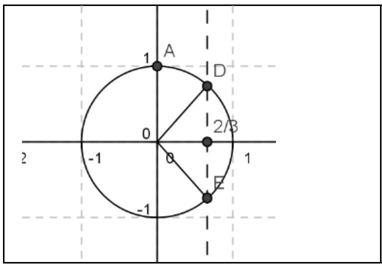
Anche la tangente si ripete e la curva si ottiene ripetendo un numero illimitato di volte.
Dominio $\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R} |\ \boldsymbol{x} \neq \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{k\pi}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z} \right\}$
Codominio = $\mathbb{R} =]\infty; +\infty[$
La funzione è dispari, ovvero $\tan(-x) = -\tan(x)$
La funzione ha periodo $T = \pi$

Esercizi svolti: costruzione di angoli di cui si conosce una funzione goniometrica

1) Vogliamo costruire l'angolo α tale che il seno sia $\frac{2}{3}$.

Possiamo procedere in due modi

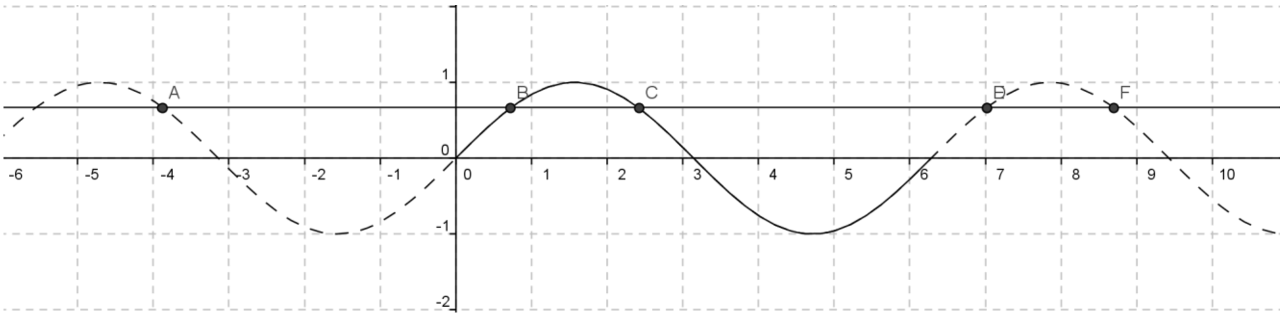
a) Sfruttando la definizione di seno e la circonferenza goniometrica



Individuiamo il punto di ascissa 2/3 sull'asse x;
tracciamo la retta parallela all'asse y, che interseca la circonferenza in due punti D ed E;
per definizione di seno, l'angolo AOD e l'angolo AOE sono i due angoli che cerchiamo.
Per il momento non conosciamo i valori esatti di tali angoli, ma li abbiamo individuati sulla circonferenza.

	Infine osserviamo che se ogni altro angolo che differisce da quelli trovati di un numero intero (positivo o negativo) di giri, avrà il seno uguale a $\frac{2}{3}$

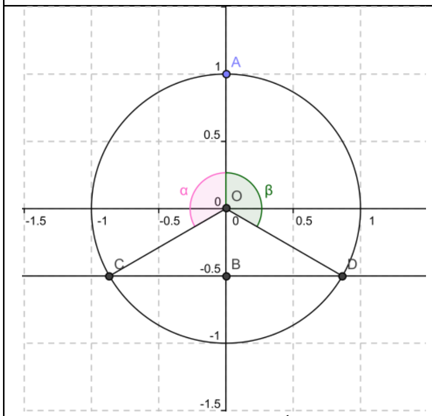
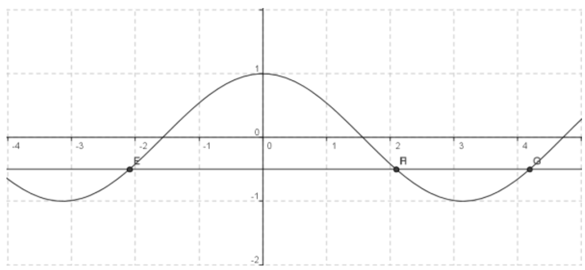
b) Il secondo modo per procedere è sfruttando la sinusoide. Ovvero $\sin(x) = \frac{2}{3}$ possiamo anche scriverla come $\begin{cases} y = \sin(x) \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$. Risolviamo graficamente questo sistema, rappresentando su uno stesso piano sia la prima funzione, $y = \sin(x)$, che la seconda funzione $y = \frac{2}{3}$



Abbiamo indicato con tratto continuo $y = \sin(x)$ per $0 \leq x \leq 2\pi$ e con linea spezzata l'intera funzione sinusoidale. Osserviamo che la retta incontra la sinusoide in B e C; le ascisse di tali punti sono gli angoli che stiamo cercando. Indichiamo tali angoli con α_1 e α_2. Come per il precedente metodo:

- Non conosciamo il valore di tali angoli;
- Poiché la funzione è periodica, otterremo infiniti altri angoli, $\alpha_1 + 2k\pi$ e $\alpha_2 + 2k\pi$

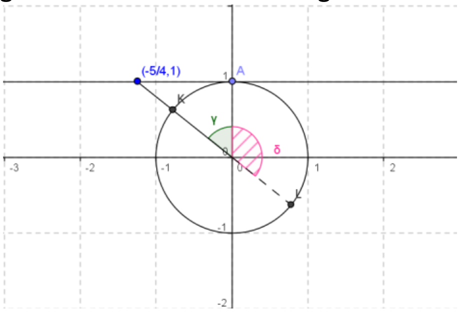
2) Vogliamo determinare l'angolo α sapendo che $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$. Possiamo procedere come sopra

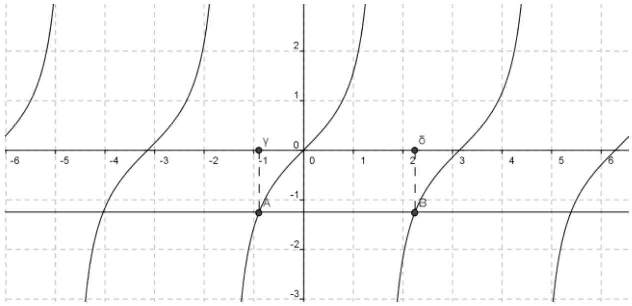
Metodo 1: con la circonferenza	Metodo 2: con il grafico funzione
 Tracciata la retta y=$-\frac{1}{2}$; abbiamo individuato le intersezioni con la circonferenza goniometrica e i due angoli. Possiamo osservare anche (come già sapevamo) che $\beta = -\alpha$ ovvero che il coseno è una funzione pari. Questa volta possiamo ricavare che $\beta = \frac{2}{3}\pi$ e $\alpha = -\frac{2}{3}\pi$. Infine possiamo osservare che tutti gli angoli che differiscono da questi di un numero intero di giri saranno soluzione	 Dovendo risolvere $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ abbiamo scritto il sistema equivalente $\begin{cases} y = \cos(x) \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$; abbiamo rappresentato graficamente le due curve e siamo andati ad individuare i punti di intersezione. In particolare per angoli tra $[-\pi; \pi]$ individuiamo due punti di intersezione che corrispondono ad $\alpha = -\frac{2}{3}\pi$ e $\beta = \frac{2}{3}\pi$. Per la periodicità della funzione possiamo ricavare $$\beta = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \ \alpha = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

del problema; ovvero $\beta = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi;\ \alpha = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$	

3) Vogliamo costruire l'angolo la cui tangente è $-\frac{5}{4}$.

Procediamo come sopra, nel modo che reputiamo più agevole

<table>
<tr><th>Metodo 1: con la circonferenza</th><th>Metodo 2: con il grafico funzione</th></tr>
<tr><td>Consideriamo la circonferenza goniometrica e la retta tangente in A.


Sulla retta scegliamo il segmento orientato $-\frac{5}{4}$. Congiungiamo il punto trovato con il centro della circonferenza e prolunghiamo; troviamo due punti sulla circonferenza.
Questi punti individuano i due angoli, che abbiamo indicato con γ e δ, la cui tangente è $= -\frac{5}{4}$.
Occorre però prima di concludere, osservare che la tangente ha periodo π; ovvero angoli che differiscono di π o di multipli interi di π hanno la stessa tangente. Pertanto quando cerchiamo l'angolo ci concentriamo <u>solo</u> sugli angoli tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ e poi aggiungiamo la periodicità.
Concludendo:
con il grafico abbiamo individuato l'angolo γ; ogni altro angolo $\gamma + k\pi$ ha la tangente richiesta (osserviamo che per $k = 1, \gamma + \pi = \delta$)</td><td>Come in precedenza $\tan(x) = -\frac{5}{4}$ equivale al sistema $\begin{cases} y = \tan(x) \\ y = -\frac{5}{4} \end{cases}$. Rappresentiamo le due funzioni


Anche in questo caso otteniamo infiniti punti, che distano tutti tra loro di multipli di π.
Cercheremo prima il punto che cade in $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$; in questo caso γ; ogni altro angolo lo otteniamo aggiungendo $k\pi$</td></tr>
</table>