1 Ebenenscharen

Gegeben sind ein Würfel $\boldsymbol{W}$, der durch die Eckpunkte $\boldsymbol{O(0|0|0)}$, $\boldsymbol{P(6|0|0)}$, $\boldsymbol{Q(0|6|0)}$ und $\boldsymbol{R(0|0|6)}$ aufgespannt wird, und eine Ebene $\boldsymbol{E : 3y + z = 8}$.

(a) Stellen Sie den Würfel $\boldsymbol{W}$ und die Ebene $\boldsymbol{E}$ in einem geeigneten Koordinatensystem dar.

Die Ebene $\boldsymbol{E}$ ist Teil einer Ebenenschar $\boldsymbol{E_a : 3y + z = a}$, mit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$.

(b) Beschreiben Sie die Lage der Ebenen innerhalb der Ebenenschar.

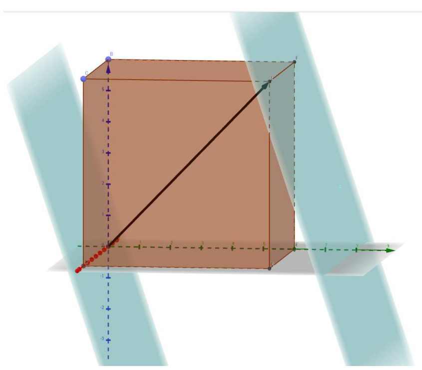
(c) Bestimmen Sie alle Werte von $\boldsymbol{a}$, deren Ebenen $\boldsymbol{E_a}$ einen Abstand von $\boldsymbol{\sqrt{10}}$ zum Punkt $\boldsymbol{S(6|6|6)}$ haben.

(d) Bestimmen Sie alle die Werte von $\boldsymbol{a}$, deren Ebenen $\boldsymbol{E_a}$ Punkte mit dem Würfel gemeinsam haben.

(e) Ermitteln Sie eine Darstellung für ein Ebenenbüschel $\boldsymbol{E_b}$, das alle Schnittebenen durch den Würfel, die die Raumdiagonale $\boldsymbol{\overline{OS}}$ enthalten, beschreibt. [mögliches Kontrollergebnis: $\boldsymbol{E_b : -(1+2b)x + (2+b)y + (b-1)z = 0}$].

(f) Berechnen Sie den Wert für $\boldsymbol{b}$, so dass die Ebene $\boldsymbol{E_b}$ den größten Abstand zum Punkt $\boldsymbol{P}$ hat.

2 Lösungen

(a) 

(b) Die Ebenen sind alle parallel zueinander, da der Normalenvektor vom Parameter unabhängig ist.

(c) Hessesche Normalenform: $\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{10}}(3y + z - a) = 0}$ Einsetzen des Punktes $\boldsymbol{(6|6|6)}$ und Abstandes in die Hessesche Normalenform: $\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{10}}|3 \cdot 6 + 6 - a| = \sqrt{10} \Longrightarrow a = 14}$ und $\boldsymbol{a = 34}$.

(d) $\boldsymbol{a \in [0; 24]}$ $\boldsymbol{E_0}$ ist im Bild die linke und $\boldsymbol{E_{24}}$ die rechte Ebenenschar.

(e) Ebenenbüschel in Parameterform: $\boldsymbol{\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ und $\boldsymbol{\vec{v}}$ so gewählt, dass $\boldsymbol{\vec{v} \cdot \vec{u} = 0}$ Ansatz für $\boldsymbol{\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow x + y + z = 0 \Longrightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix}}$ Multiplizieren von $\boldsymbol{\vec{v}}$ mit $\boldsymbol{\frac{1}{x}}$ und

Ersetzen von $\frac{y}{x} = b$ ergibt $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ -1-b \end{pmatrix}$ und damit der Normalenvektor $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -1-2b \\ 2+b \\ b-1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ Kontrollergebnis.

(f) Hessesche Normalenform für das Büschel: $\frac{1}{\sqrt{6(1+b+b^2)}} |-(1+2b)x + (2+b)y + (b-1)z| = 0$
Einsetzen des Punktes $(6|0|0)$ ergibt die Abstandsfunktion $d(b) = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1+b+b^2}} |1+2b|$ Annahme, dass $1+2b > 0$, dann können die Betragsstriche weggelassen werden. (Falls das nicht der Fall ist, wird alles mit -1 multipliziert und das Ergebnis bleibt gleich.)
$d'(b) = \frac{3\sqrt{6}}{2(1+b+b^2)^{3/2}} = 0$. Der Maximalwert wird für $b \to \pm\infty$ angenommen (maximaler Abstand $d = 2\sqrt{6} \approx 4,89$. Das entspricht der Ebene $E_\infty : -2x + y + z = 0$. Für $b = -0.5$ liegt der Punkt P auf der Ebene (minimaler Abstand $d = 0$).