Pitagora e il “suo” teorema

Storia, dimostrazioni, conseguenze

Benedetta Gianoli, Federico Lazzari, Alessandra Negro, Alessandro Viganò

Il teorema di Pitagora non è di Pitagora

- Ritrovamento tavoletta d'argilla paleobabilonese(1800-1600 a.C.)che rivela la conoscenza del teorema di Pitagora
- Documenti Babilonesi, Cinesi ed Indiani provano che il teorema era noto ben prima della nascita di Pitagora
- Impossibilità di risalire all'origine del teorema a causa dell'universalità delle idee matematiche
- Furono i pitagorici ad attribuire il teorema a Pitagora: essi hanno il merito di averne dato una dimostrazione rigorosa

Pitagora

- Figura importante perché segnò il passaggio dalla matematica applicata alla matematica astratta, grazie all'introduzione di dimostrazioni fondate sul metodo deduttivo a partire da assiomi esplicitamente formulati
- L'importanza di questo personaggio emerge anche da quanto affermato da Bertrand Russell:

"Dal punto di vista intellettuale, Pitagora è uno degli uomini più notevoli che siano mai esistiti, sia per la sua sapienza sia per altri aspetti. La matematica, intendendo come tale le dimostrazioni e i ragionamenti deduttivi, comincia con Pitagora. Non conosco altro uomo che abbia avuto altrettanta influenza nella sfera del pensiero".

Vita

- Nacque a Samo nel 580 a.C.
- Fu discepolo di Talete
- Viaggiò molto e di conseguenza visitò molti luoghi (in particolare Egitto e Babilonia)
- Dopo aver abbandonato la sua patria per sfuggire alla dittatura di Policrate si stabilì a Crotone, dove fondò una comunità filosofico-religiosa
- Quando alla fine del VI sec. una sommossa cacciò i pitagorici da Crotone, Pitagora si rifugiò a Metaponto, dove poco dopo morì

Pitagora che regge il cosmo

I Pitagorici

- I seguaci di Pitagora in seguito alla sua morte diedero vita a nuove comunità: le più celebri furono quella di Tebe, fondata da Filolao, e quella di Taranto, fondata da Archita
- Si dividevano in acusmatici (= ascoltatori) e matematici
- Ripresero e continuarono gli studi del maestro, in ambito:
  - filosofico
  - matematico
  - astronomico
- Vita per certi aspetti quasi monacale, in quanto prevedeva la comunione dei beni, l'osservanza di regole molto rigorose. Ecco come, secondo Giamblico, i pitagorici concludevano la loro giornata:

  "Nel tardo pomeriggio tornavano a passeggiare in gruppi di due o tre, per richiamare alla memoria le cognizioni apprese e per esercitarsi negli studi liberali. Dopo il passeggio facevano un bagno e andavano al banchetto comune. Al banchetto seguivano le libagioni e infine la lettura. Era consuetudine che leggesse il più giovane e che il più anziano stabilisse quello che si doveva leggere e come".

I numeri: principio di tutto

- Per i pitagorici i numeri (interi) sono il principio di ogni cosa: tutto può essere ricondotto ad una relazione numerica

- Applicano i numeri alla loro dottrina, suddivisa in:
  - Aritmetica
  - Musica
  - Geometria
  - Astronomia

Teoria degli opposti

- Idea di realtà fondata sulle interazioni tra gli opposti
- Dieci opposizioni fondamentali: riflettono un assetto dualistico della realtà
- Opposizioni applicate ai numeri, che assumono un valore simbolico magico e religioso
- Ambivalenza dell' unità: l'uno non è considerato né pari né dispari; tale ambivalenza riflette la concezione dualistica dell' universo, rappresentata proprio dal n°1 (principio di tutti i numeri)
- Valori dati ai vari numeri (4 = giustizia, 5 = matrimonio, ecc…)

Teoria dell’ aritmogeometria

- Collega fra loro numeri e figure geometriche

- Utilizzo, da parte dei pitagorici, di sassolini per costruire i numeri (mentre noi usiamo generalmente dei punti disegnati su carta)

- Da tali costruzioni si possono ricavare proprietà aritmetiche e geometriche (cubi e quadrati dei numeri, triangoli equilateri, numeri al pentagono, all’ esagono, ecc…)

La Tetraktis

- Il numero più importante per i pitagorici era il 10, che per loro rappresentava l'universo. Dice Filolao:

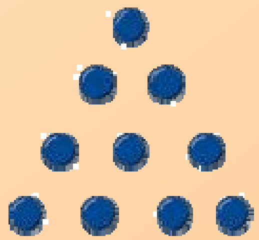
  "Il 10 è responsabile di tutte le cose, fondamento e guida sia della vita divina e celeste, sia di quella umana"

- Il 10 è per così dire "quattro al triangolo" ed è inoltre la somma dei primi quattro numeri (1+2+3+4=10), che si ritrovano anche nei rapporti degli intervalli musicali

- Il 10 rappresenta inoltre la somma di tutte le dimensioni

- Il 10 era la sacra Tetracktis, simbolo esoterico dei pitagorici

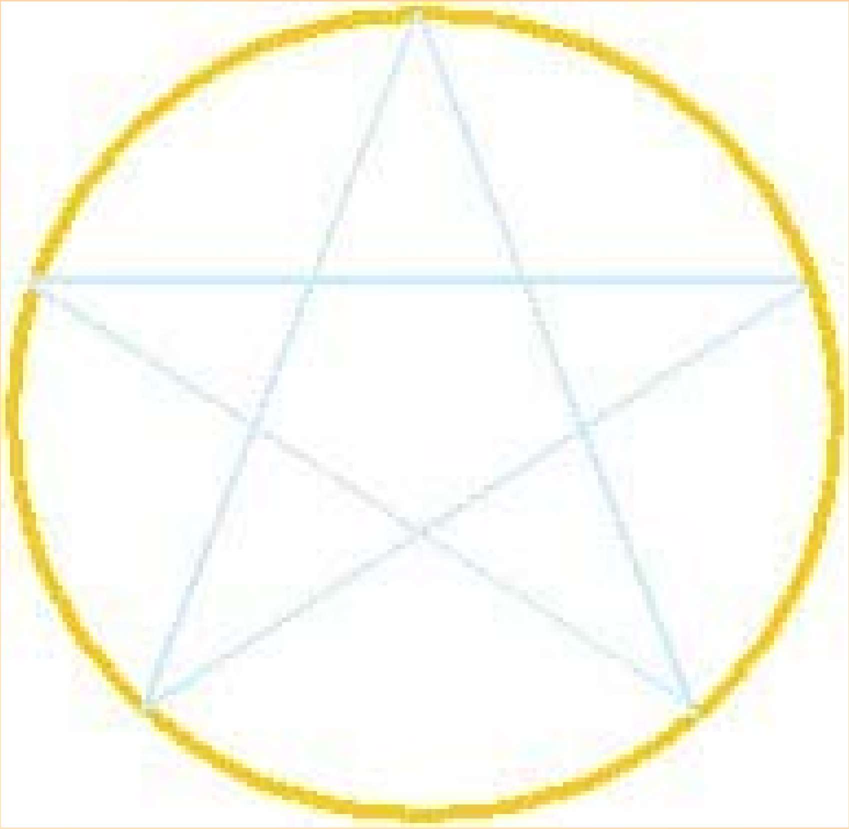
- Il 10 è considerato simbolo di pace e fratellanza



La tetraktis

Il pentagramma

- Altra figura sacra ai pitagorici, una stella a 5 punte racchiusa nel cerchio divino
- Era il segno di riconoscimento fra gli adepti
- Il pentagramma è rimasto ancora oggi un simbolo sacro-magico



La stella a cinque punte

Influenza delle idee pitagoriche

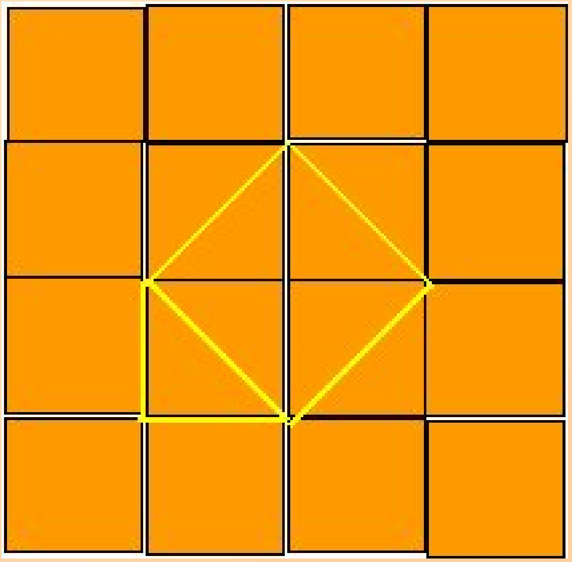
- L'influenza esercitata dai pitagorici risultò fondamentale per lo sviluppo della filosofia greca classica e del pensiero medioevale europeo
- Nel Rinascimento alcune idee dei pitagorici, come la Tetraktis o le proporzioni armoniche, vennero applicate anche in campo artistico.
- Nel Seicento, Copernico dichiarava che il suo sistema, con la Terra che gira attorno al Sole, era un sistema pitagorico e lo stesso Galileo veniva considerato "pitagorico", poiché Pitagora era visto come il padre delle scienze esatte.

Il teorema di Pitagora nell'antichità

- Si racconta che Pitagora abbia scoperto il suo teorema osservando delle piastrelle quadrate del pavimento di una sala d'aspetto

- La piastrella quadrata poteva essere divisa in due triangoli rettangoli, e l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa di uno dei due triangoli rettangoli è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui due cateti

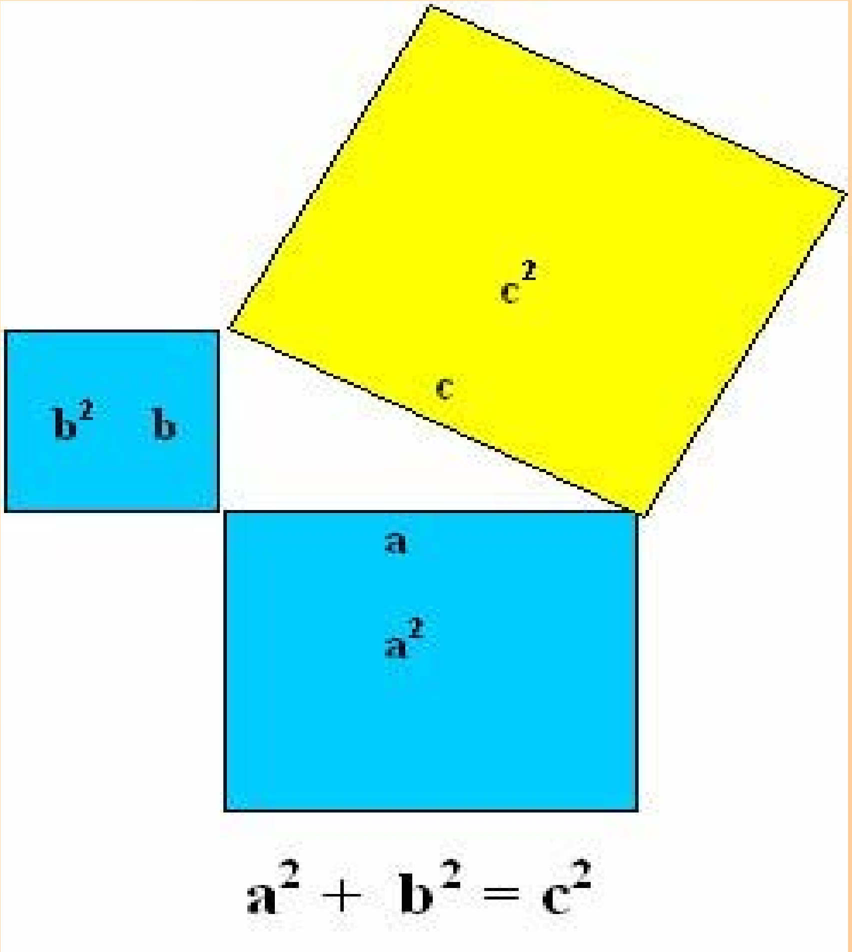
- Il teorema vale per qualsiasi tipo di triangolo rettangolo, anche con cateti di lunghezza diversa



Dalle piastrelle del pavimento al teorema di Pitagora

Formulazione euclidea

- In ogni triangolo rettangolo il quadrato del lato opposto all'angolo retto è uguale ai quadrati dei lati che contengono l'angolo retto



Schema euclideo

Tracce del teorema in Cina

- Si ricollega al Chou Pei Suang Ching, uno dei più antichi libri cinesi di matematica
- Risale al 1500 a.C.
- Nel disegno (figura 1) si vede infatti un triangolo rettangolo di lati 3, 4 e 5 e un quadrato grande di lato 7=3+4
- Se raddoppiamo i quattro triangoli (figura 2) otteniamo il quadrato grande di lato 7
- L'aerea di questo quadrato grande è di 49 unità al quadrato. Per avere l'aerea del quadrato piccolo e scuro dobbiamo togliere l'area di quattro triangoli, ognuno dei quali ha area 6x4, cioè 49-24=25. Il lato misura dunque 5 unità ed è l'ipotenusa del triangolo rettangolo di cateti 3 e 4

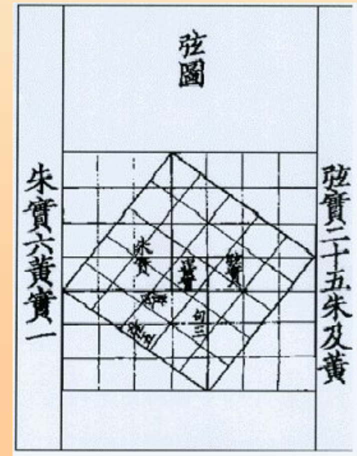


Figura 1

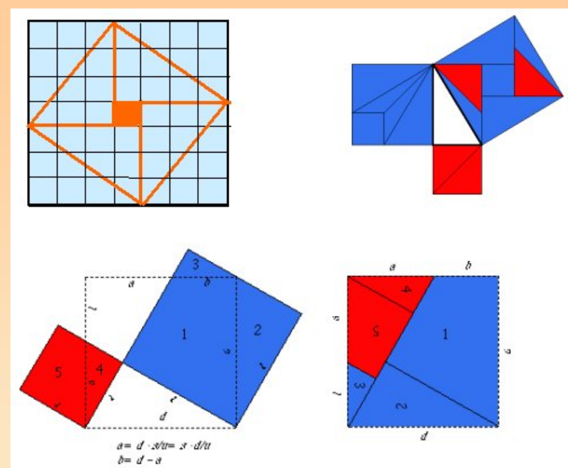
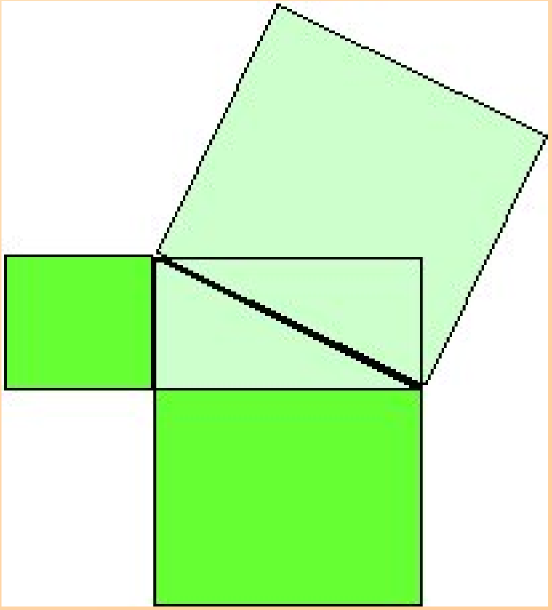


Figura 2

Tracce del teorema in India

- Si ricollega ai Sulbasutra, i testi che contenevano le istruzioni per la costruzione degli altari
- Scritto tra l'800 e il 600 a.c.
- Definizione: La fune tesa per la lunghezza della diagonale di un rettangolo forma un'area pari alla somma di quella formata dal lato verticale e da quello orizzontale



Tracce del teorema in Arabia

- Dimostrazione di Thabit ibn Qurra Marwan al'Harrani (826- 901)

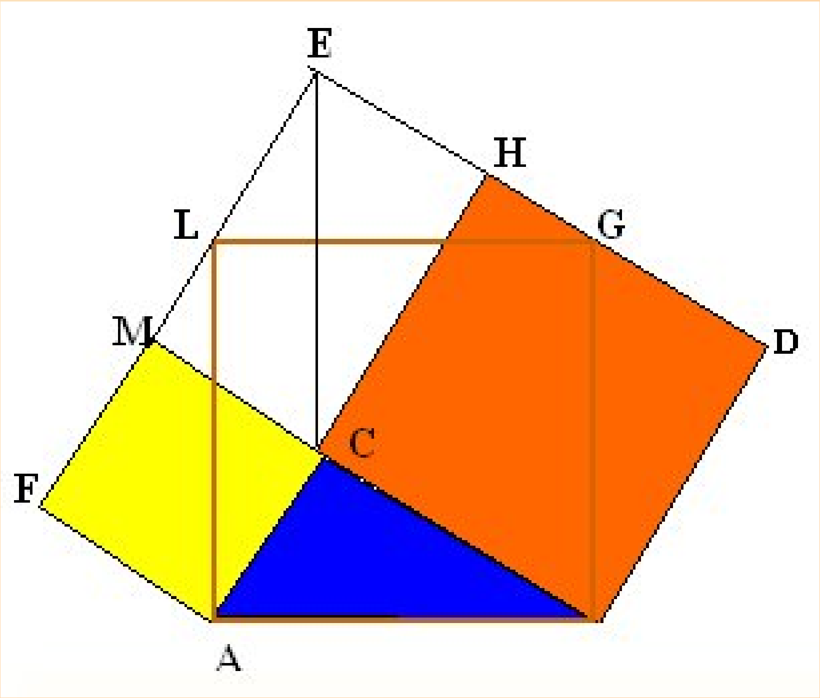
- I triangoli ABC, CEH, CEM, BGD, EGL, AFL sono tutti equivalenti. Inoltre osserviamo che il poligono ABDEF può essere scomposto in due modi diversi:

$$ABDEF = AB^2 + \Delta BGD + \Delta EGL + \Delta AFL$$

$$ABDEF = AC^2 + BC^2 + \Delta ABC + \Delta CEH + \Delta CEM$$

- Dall'uguaglianza delle due relazioni e dall'equivalenza dei triangoli indicati ricaviamo:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

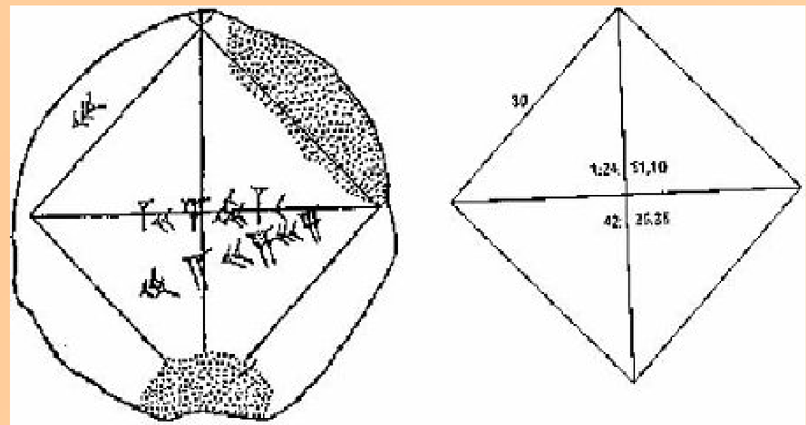


Lo schema babilonese

- Il primo numero sulla diagonale è 1;24,51,10
- E' in notazione sessagesimale, e il punto e virgola separa la parte intera da quella decimale. Nel sistema decimale risulterebbe:

  $$1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 = 1{,}414213\ldots$$

  che è un valore approssimato della radice di 2
- Se il lato del quadrato è 1, la diagonale è la radice quadrata di 12 più 12, cioè di 2. Se il lato è 30, sarà il prodotto di 30 per la radice quadrata di 2



Schema babilonese

Le mille dimostrazioni del teorema di Pitagora

- Le dimostrazioni del teorema che sono state proposte sono diverse centinaia con molte varianti

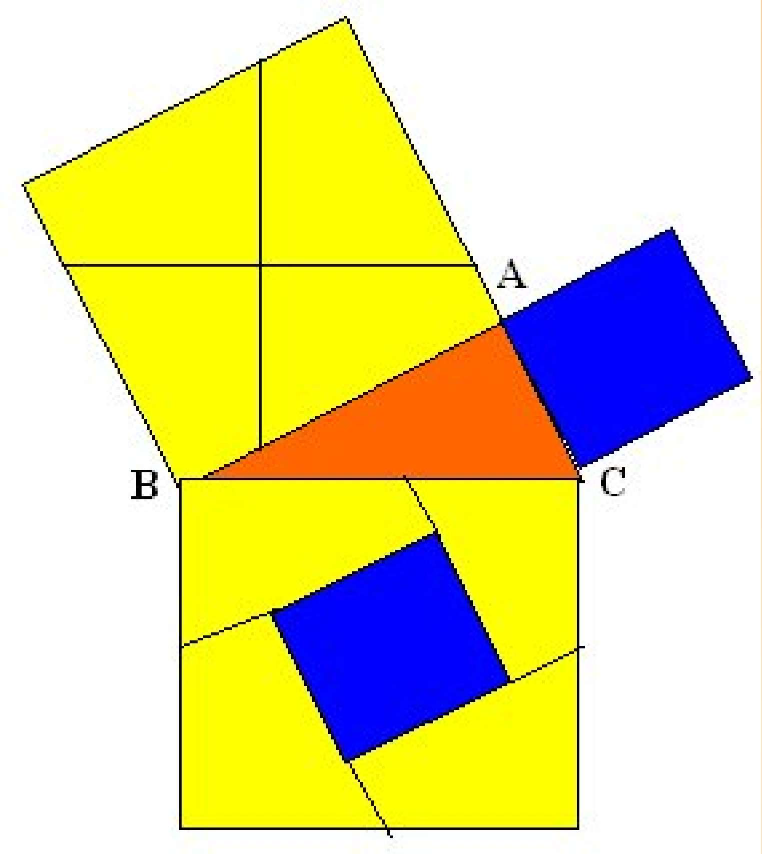
- Il loro numero continua a crescere grazie a quelle che ancora oggi vengono scoperte da matematici sempre affascinati da questo teorema

- Tra le tante dimostrazioni ne troviamo alcune veramente curiose

Dimostrazione di Henry Perigal.

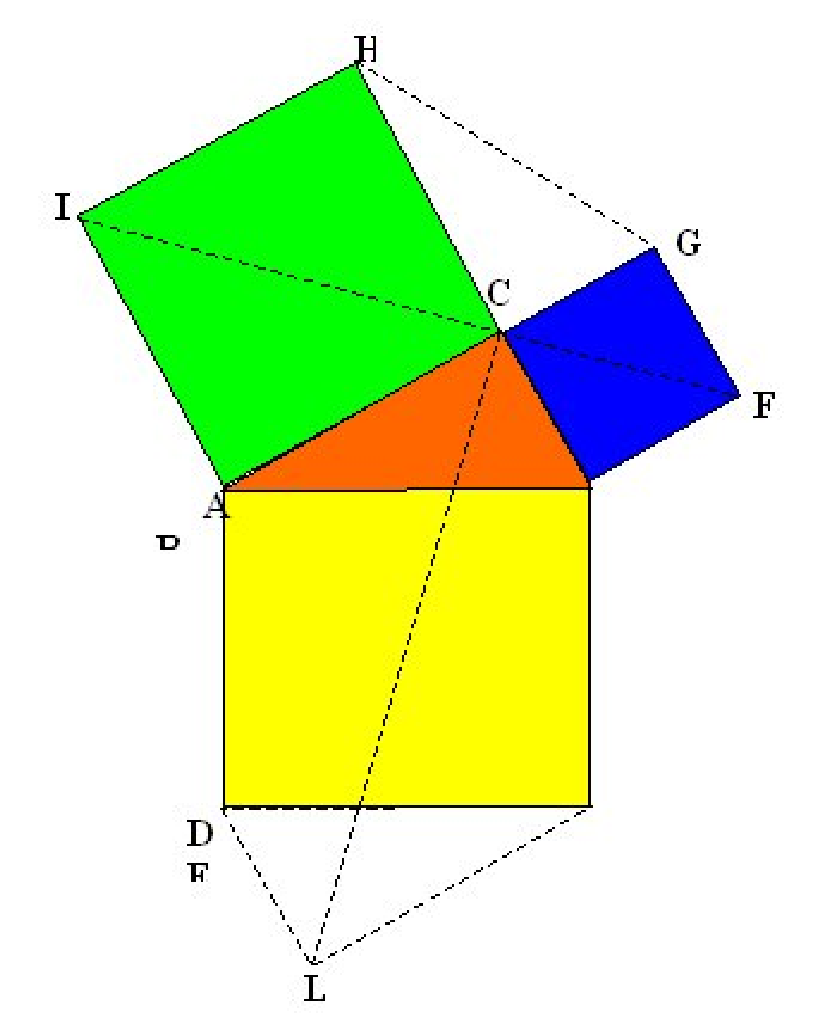
- Divide il quadrato costruito sul cateto maggiore in quattro parti, con due segmenti passanti per il centro del quadrato stesso, uno dei quali parallelo e l'altro perpendicolare all'ipotenusa BC, e ricompone poi i quattro pezzi, insieme al quadrato costruito sull'altro cateto, nel quadrato dell'ipotenusa

- Dimostra l'equivalenza delle parti in cui sono stati divisi i quadrati dei cateti con quelle ricomposte sul quadrato dell'ipotenusa



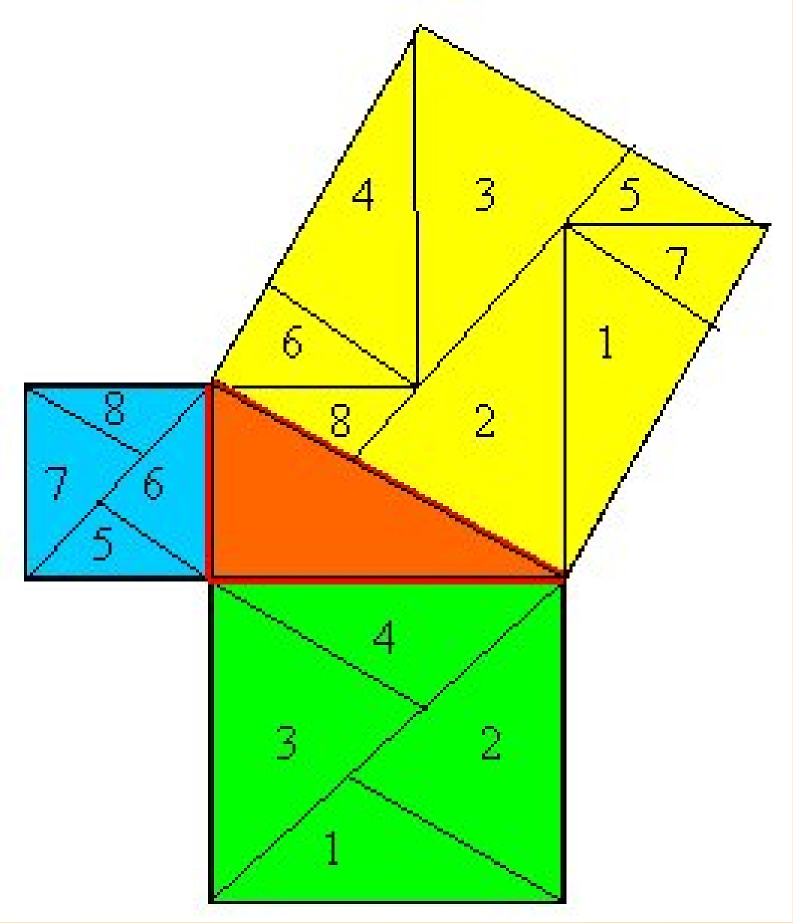
Dimostrazione di Henry Perigal.

Dimostrazione di Tempelhoff



Dimostrazione di Tempelhoff

Dimostrazione di Ozanam

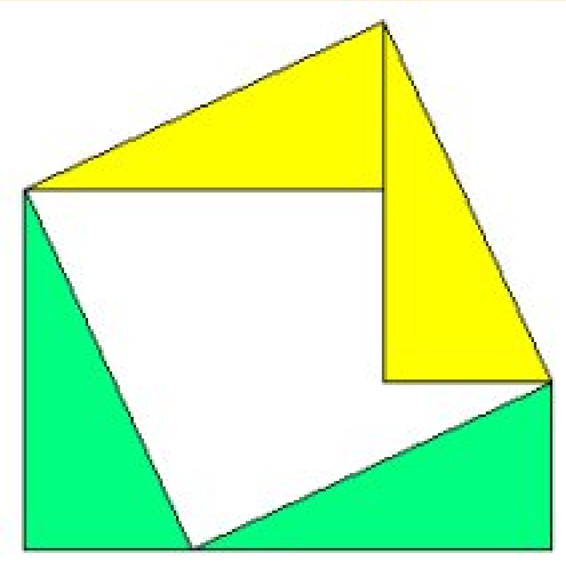


Dimostrazione di Ozanam

Dimostrazione di G.B. Airy

- I due triangoli gialli con la parte bianca formano il quadrato dell'ipotenusa, mentre la stessa parte bianca con i due triangoli verdi, equivalenti ai precedenti, forma i quadrati dei cateti, com'è facilmente verificabile. Airy la scrive in questo modo:

Come potete veder, son qui:
$a^2 + b^2 - ab$
Se due triangoli sono sopra di me
Il quadrato dell'ipotenusa c'è
E se questi di sotto invece stanno
I quadrati dei cateti si hanno.



Dimostrazione di G.B. Airy

Teorema di Pitagora: non solo triangoli

- Il teorema di Pitagora continua ad essere valido anche se si sostituiscono i triangoli rettangoli con altre figure (triangoli scaleni, pentagoni, esagoni, poligoni irregolari...) purché siano figure simili tra loro
- Ad esempio per i pentagoni costruiti sui lati del triangolo rettangolo di figura 1, l'area del pentagono sull'ipotenusa è equivalente alla somma delle aree dei pentagoni sui cateti
- In figura 2, per i tre semicerchi costruiti sui lati del triangolo rettangolo, l'area del semicerchi sull'ipotenusa è equivalente alla somma delle aree dei semicerchi sui cateti

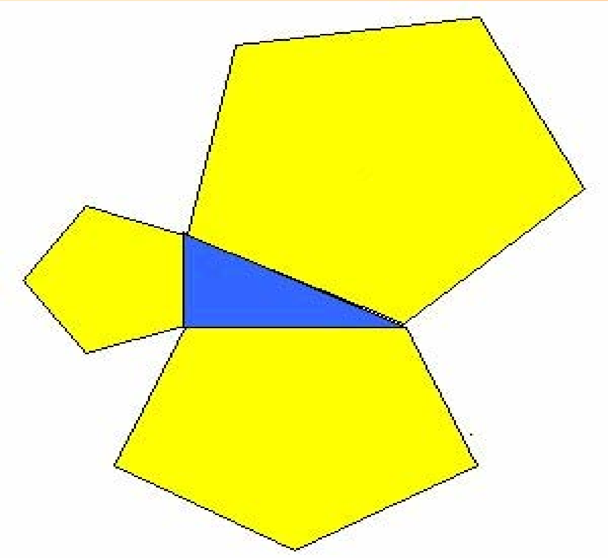


Figura 1

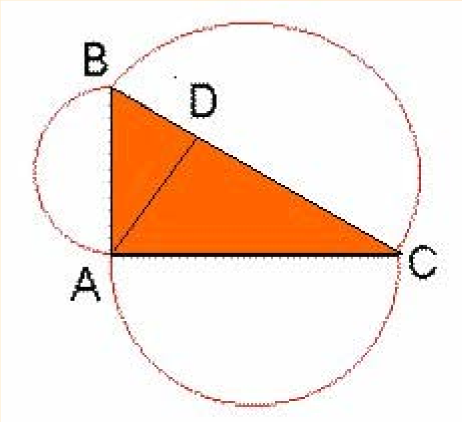


Figura 2

Teorema di Pitagora: non solo triangoli

- Da quanto ottenuto in figura 2 si giunge a un risultato molto interessante. Se si ribalta il semicerchio sull'ipotenusa (fig 3), vale sempre la relazione precedente: il semicerchio sull'ipotenusa (ribaltato) è equivalente alla somma dei semicerchi sui cateti
- Rimangono il triangolo e le due parti più chiare al cui somma risulta equivalente all'area del triangolo, perché differenze di aree uguali
- Le due figure chiare a forma di luna vengono chiamate lunule (cioè piccole lune)

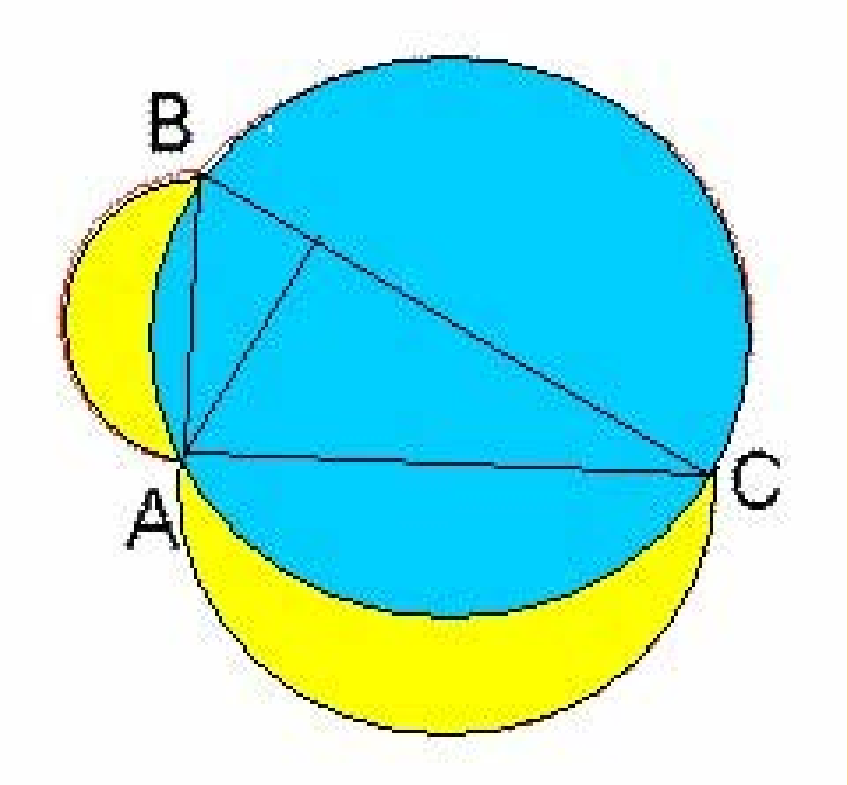


Figura 3

Teorema di Pitagora: non solo triangoli

- Nel caso di un triangolo rettangolo isoscele (figura 4), una lunula è equivalente alla metà del triangolo

- In questo modo risulta che una figura rettilinea, il triangolo rettangolo, ha la stessa area di una figura curvilinea, la lunula

- Pare che il primo ad aver dato tale dimostrazione sia stato Ippocrate di Chio nel IV sec a.C.

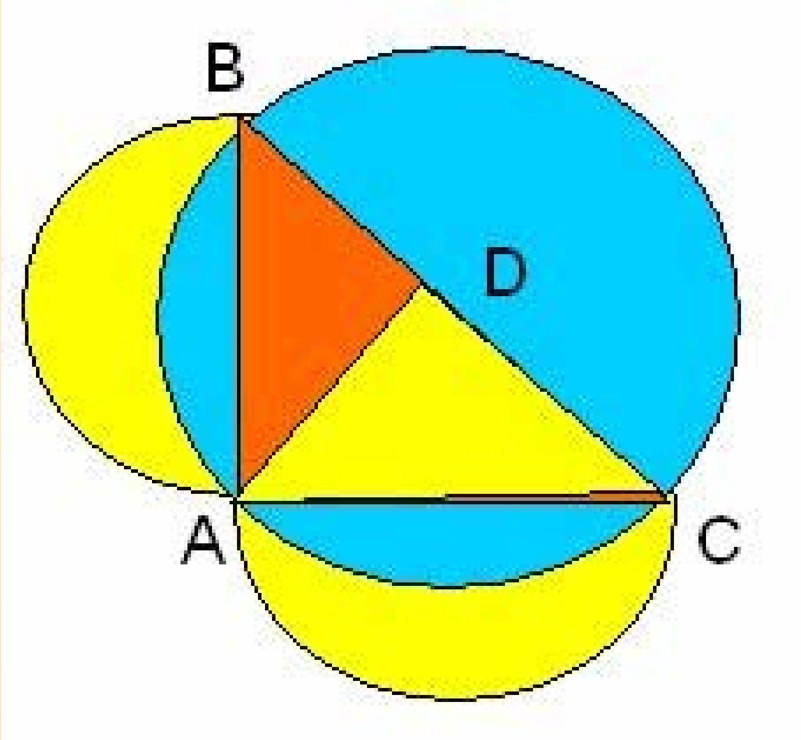


Figura 4

Terne numeriche

- Le terne numeriche,o pitagoriche, costituiscono l’ aspetto aritmetico del teorema di Pitagora
- Esistono infinite terne numeriche: 3,4,5   5,12,13   7,24,25 ecc..
- Ogni numero della terna corrisponde a uno dei lati del triangolo

Un problema già noto agli antichi

- Tavoletta paleobabilonese (Plimpton 322) che mostra il problema aritmetico delle terne Pitagoriche
- Numeri legati dalla relazione del teorema
- Possibile sorgere del problema della relazione tra aritmetica e geometria, tuttavia smentito dal fatto che in realtà la geometria del tempo era di tipo pratico, non esisteva un pensiero geometrico indipendente dalle semplici applicazioni.

Teorema inverso

- Euclide elabora una precisa dimostrazione del teorema, che si può definire l'opposto del teorema di Pitagora:

  "Se in un triangolo il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati dei due lati rimanenti, allora l' angolo contenuto dai due lati rimanenti è retto"

Terne babilonesi

- Probabile conoscenza da parte delle terne babilonesi delle formule fondamentali per la costruzione delle terne stesse; tali formule sono attribuite a Diofanto

- Diofanto: matematico greco del III sec d.C., autore dell' Arithmetica che raccoglie 189 problemi risolti con vari metodi

Formule delle terne

- Dati due numeri m e n, con m>n, si ha:

  a =m2 – n2 b =2mn c =m2 + n2

- Ne consegue che $a^2 + b^2 = c^2$

- Le prime tre formule ci danno tutte le possibili terne pitagoriche, e moltiplicando a e b per uno stesso numero si ottiene ancora una terna pitagorica

Casi particolari

- 1° caso:

  se n =m -1 si ha b= c -1 e quindi b e c risultano numeri consecutivi: la differenza fra c e b sarà sempre uguale a 1

- 2° caso:

  se si prende per m un valore qualsiasi e n costante, uguale a 1, si otterranno delle terne pitagoriche per le quali la differenza fra l' ipotenusa e il cateto maggiore sarà sempre uguale a due

- Osservazioni generali: la differenza fra il numero più grande e quello più piccolo della terna è uguale al quadrato della differenza fra i due numeri generatori; così la somma fra il numero più grande della terna e quello più piccolo è invece uguale al quadrato della somma dei due numeri generatori

Terza dimensione

- E’ logico estendere le terne pitagoriche alla terza dimensione; per esempio: alla diagonale di un parallelepipedo le cui dimensioni siano a, b e c. In questo caso la diagonale d del parallelepipedo è $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

- Ecco passare così dalle terne alle quaterne pitagoriche:

3, 4, 12 e 13 $\longrightarrow$ 32 + 42 + 122 = 132

Cinquine pitagoriche

- Cinquine di numeri tali che la somma dei primi tre sia uguale alla somma degli ultimi due:

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2$$

- Risoluzione del problema (formule di Diofanto):

$$a = m^2 + n^2$$
$$b = m^2 - n^2$$
$$c = 2mn \qquad\qquad (\text{ con } m>n)$$

- Ne consegue che:

$$d = c + b$$
$$e = c - b$$

Il teorema di Fermat

- xn + yn = zn
- Pierre de Fermat (1601-1665) affermò che la scomposizione non è possibile con i numeri di potenza superiore a 2
- La sua dimostrazione non venne mai trovata
- “Ultimo teorema di Fermat”

  Non è invece possibile dividere un cubo in due cubi o un quadrato - quadrato in due quadrato - quadrati e in genere nessuna potenza superiore al due in due potenze dello stesso ordine. Di questo ho trovato una splendida dimostrazione, ma la ristrettezza del margine di questo libro non la può contenere.

Pierre de Fermat

Il seguito del Teorema

- Fra le carte di Fermat: dimostrazione dell'impossibilità della formula per n=4
- Nel Settecento Eulero dimostrò l'impossibilità per n=3
- Nell'Ottocento Legendre e Lejeune-Dirichlet dimostrarono l'impossibilità per n=5
- Negli anni Ottanta si verificò il teorema per $6 \leq n \leq 25000$
- All'inizio del Novecento Paul Wolfskehl istituì l'omonimo premio per chi avesse trovato la dimostrazione del teorema

Arithmeticorum Liber II. 61

IN QVAESTIONEM VII.

QVAESTIO VIII.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

QVAESTIO IX.

L'Arithmetica di Diofanto in una edizione francese del 1670, con l'annotazione di Fermat.

La dimostrazione di Wiles

- Nel 1995 il premio Wolfskehl fu assegnato a Andrew Wiles, matematico inglese

- Due mesi dopo venne trovato un errore nella sua dimostrazione

- Due anni dopo, Wiles presentò la dimostrazione corretta, che ottenne definitivamente il premio Wolfskehl

- Molti matematici cercano ancora una dimostrazione più semplice, convinti che davvero Fermat l’avesse trovata

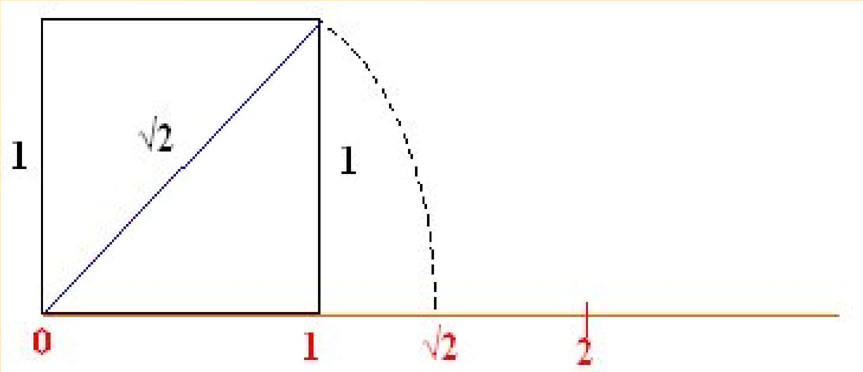
Andrew Wiles

Gli incommensurabili: un problema

- Furono scoperti grazie al teorema di Pitagora, calcolando la misura della diagonale di un quadrato di lato 1

- Misero in crisi la concezione pitagorica dell'universo, secondo la quale tutto è numero

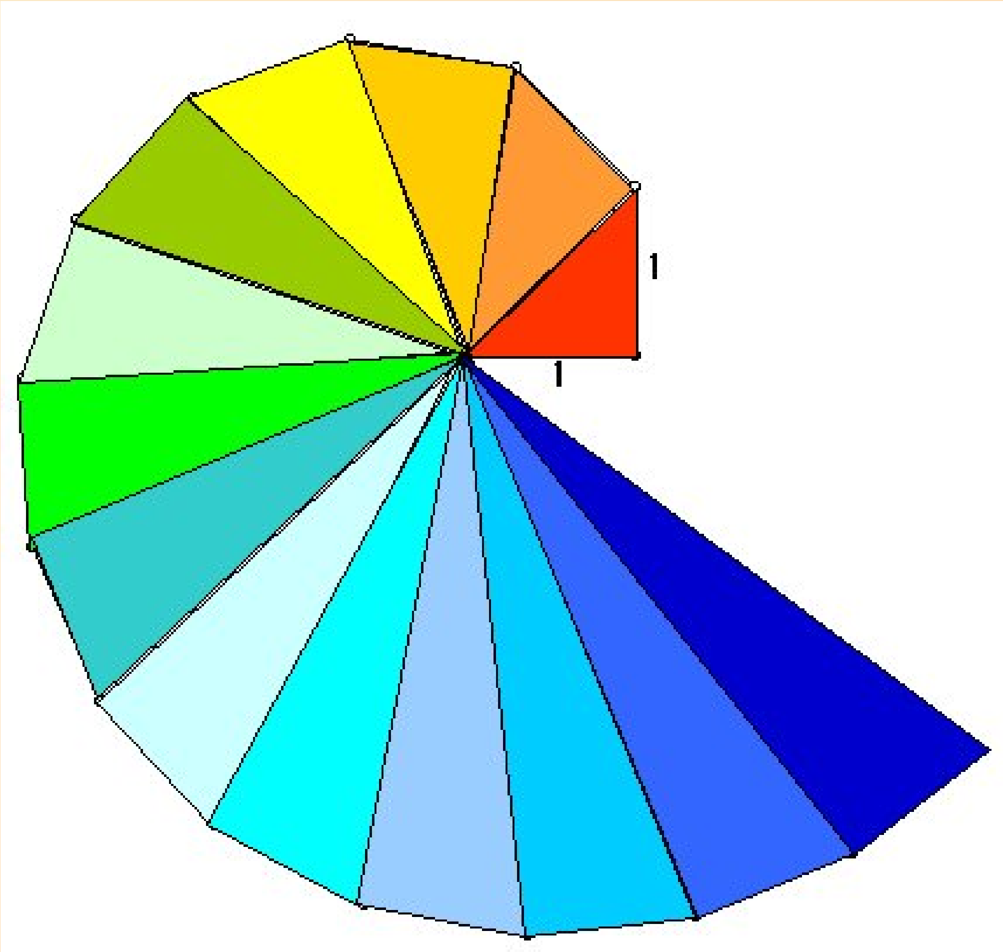
- Secondo la leggenda, la loro scoperta fu resa pubblica dal "traditore" Ippaso di Metaponto



La dimostrazione degli incommensurabili

- Quadrato: d = diagonale, l = lato
- $d^2 = l^2 + l^2 \Longrightarrow (d/l)^2 = 2$
- Riduciamo ai minimi termini, cioè a p/q: otteniamo $p^2/q^2 = 2 \Longrightarrow p^2 = 2q^2$. p deve dunque essere pari, quindi q è necessariamente dispari, poiché non può avere fattori comuni con p
- Visto che p è pari, sostituiamolo con 2r: otteniamo $4r^2 = 2q^2 \Longrightarrow q^2 = 2r^2$. q deve quindi essere pari, contrariamente a quanto dimostrato prima, ma un numero non può essere pari e dispari contemporaneamente, quindi d e l sono incommensurabili

La spirale della radice quadrata



La spirale della radice quadrata

Per saperne di più…su carta

T. Dantzig, **Le nombre**, Payot, Paris 1931.
Pierre de Fermat, **Osservazioni su Diofanto**, Boringhieri, 1959.
M. Timpanaro Cardini - **Pitagorici, testimonianze e frammenti** - La Nuova Italia, 1969.

Ludovico Geymonat, **Storia del pensiero filosofico e scientifico**, Garzanti, 1970.

O. Neugebauer, **Le scienze esatte nell'Antichità**, Feltrinelli, 1974.
Martin Gardner, **Enigmi e giochi matematici**, Sansoni, 1976.

Carl B. Boyer, **Storia della matematica**, Mondadori, 1982.

Livia Giacardi e Silvia Clara Roero, **La matematica delle civiltà arcaiche**, Stampatori, 1979.

Serge Lang, **La bellezza della matematica**, Bollati Boringhieri, 1991.
Eli Maor, **All'infinito e oltre**, Mursia, 1993.

Hugo Steinhaus, **Matematica per istantanee**, Zanichelli, 1994
Luciano Cresci, **I numeri celebri**, Bollati Boringhieri, 2000.

Denis Guedj, **Il teorema del pappagallo**, Longanesi, 2000.

George Gheverghese Joseph, **C'era una volta un numero**, Il Saggiatore, 2000.
Claudio Citrini, **Da Pitagora a Borges. Discussioni in rete sull'infinito**, Mondadori Bruno, 2004

Lucio Lobardo Radice, **La matematica da Pitagora a Newton,** Muzzio, 2004
Jean-François Mattei, **Pythagore et les Pythagoriciens**, P.U.F., 1993

Per saperne di più…sul web

http://www.math.unifi.it/archimede/archimede/pitagora/prima.html
Un'ampia presentazione di Pitagora e del suo teorema, dal Giardino di Archimede. E' il primo Museo della Matematica che si trova nel castello di San Martino, a Priverno, tra Roma e Napoli, tel. 0773/904601.

http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/lolli/articoli/Pitagora.pdf
Un articolo di Gabriele Lolli, *Esistono i mortali, esistono gli dei ed esistono gli esseri come Pitagora*

http://www.mat.uniroma3.it/scuola_orientamento/scuola/pitagora.htm
La matematica dell'armonia, un articolo di Piergiorgio Odifreddi su Pitagora, La Stampa, 7/5/1998.

http://www.itchiavari.org/pitagora.html
Un articolo di Vincenzo Gueglio su Pitagora, il Tao e la radice di due.

http://www.liceoberchet.it/ricerche/pitagora/index.htm
Un'accurata ricerca su Pitagora filosofo e matematico della II C, anno scolastico 1999 - 2000, proff. Michele Gherlone e Renata Tolino, del Liceo Classico Berchet di Milano.

http://www.filosofico.net/pitago.html
Un'ampia presentazione dei pitagorici.

http://lgxserver.uniba.it/lei/rassegna/001021e.htm
La presentazione del libro di George Gheverghese, C'era una volta un numero, sulle origini del pensiero matematico extra - europeo, Federico Peiretti, La Stampa, 21/10/ 2000.

http://www.sciences-en-ligne.com/momo/chronomath/chrono1/Pythagore.html
La matematica di Pitagora.

http://www.csdecou.qc.ca/phenix/Pythagore/intro.html
Una curiosa presentazione animata del teorema di Pitagora.

http://math93.free.fr/pythagor.htm
Biografia di Pitagora

http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Pythagoras.html
Accurata biografia di Pitagora.

Per saperne di più…sul web

http://www.math.tamu.edu/~don.allen/history/pythag/pythag.html
Un'ampia presentazione della matematica dei pitagorici.

http://www.cut-the-knot.com/pythagoras
Ventotto diverse dimostrazioni del teorema di Pitagora.

http://www.cut-the-knot.com/pythagoras/pythTriple.html
Applet per la visualizzazione delle terne pitagoriche.

http://www.maa.org/mathland/mathtrek_11_27_00.html
La storia del teorema di Pitagora in un articolo di Ivars Peterson, l'autore del bel libro di divulgazione Il turista matematico, Rizzoli, 1991.

http://www.maa.org/mathland/mathland_5_29.html
E un articolo sempre di Peterson su matematica e musica.

http://www.sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Euclid/java/html/pythagoras.html
Una serie di applicazioni interattive che consentono di verificare graficamente alcune dimostrazioni del teorema di Pitagora.

http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI47.html
Una presentazione straordinaria con applicazioni in java degli Elementi di Euclide.

Per saperne di più…sul web

http://www.mathgym.com.au/history/pythagoras/pyth.htm
Pitagora: lezioni ed esercizi per gli studenti.

http://theosophy.org/tlodocs/PythagorasandHisSchool.htm
La scuola filosofica di Pitagora.

http://nrich.maths.org/mathsf/journalf/nov99/art1/
E un'estensione delle terne pitagoriche alle quadruple, quintuple, ecc

Pitagora e la musica:
http://www.dartmouth.edu/~matc/math5.geometry/unit3/unit3.html

http://www.myastrologybook.com/Pythagoras-music-of-the-spheres.htm

http://www.cangelic.org/dwp/gg/pythagoras_music.htm

http://www.medieval.org/emfaq/harmony/pyth.html

http://mathsforeurope.digibel.be/prepvis1d.htm

http://fabrisia.com/pentagram.htm
Una presentazione del pentagramma, da non prendere troppo sul serio, come simbolo magico ed esoterico.

http://www.amulet.co.uk/
Dalla matematica alla stregoneria. Qui sono in vendita amuleti di ogni tipo, come il pentagramma pitagorico.