Produit vectoriel – Produit mixte (1) S.G + S.V
Plans et droites

(*Dans la suite, l'espace est rapporté au repère orthonormé direct* $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$)

Produit vectoriel – Produit mixte

Ex.1

On donne les points A (2 ; 1 ;-1), B (3 ; 2 ; 2) et C (-2 ; 1 ;-3).
1) Calculer l'aire du triangle ABC.
2) Calculer la longueur de la hauteur [AH] du triangle ABC.

Ex.2

On donne les points A(3 ;2 ;-3), B(2 ;1 ; -1) et C(4 ; 0 ; 1).
1) Calculer le volume du parallélépipède de côtés [OA], [OB] et [OC].
2) Calculer la distance de O au plan (ABC).

Ex.3

On donne les points A(-1 ;2 ; 1), B(-2 ;1 ; 0) , C(-1 ; 1 ; -1) et E (1 ; -3 ; 1).
1) Montrer que les A, B et C déterminent un plan (P).

2) Montrer que (EC) est perpendiculaire à (P).

3) Montrer que les plans (OEC) et (P) sont perpendiculaires.

4) a - Montrer les quatre points A, B, C et E sont non coplanaires.
   b - Calculer l'aire du triangle ABC.
   c - Calculer, selon deux méthodes, le volume du tétraèdre EABC.

Ex.4

A, B et C sont trois points donnés.

Déterminer le lieu des points N tels que: $\overrightarrow{NA}\wedge\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NB}\wedge\overrightarrow{NC}=\vec{0}$.

Droites et plans

Ex.1

On donne les deux droites distinctes (D) et (D') définies par :
(d) : $x = - m + 1,\ y = 2m,\ z = - 2m + 3$.
(d') : $x = t + 3,\ y = - 2t – 6,\ z = 2t + 5$. où m et t sont deux paramètres réel.

1) a - Démontrer que (D) et (D') sont parallèles.
   b - Vérifier qu'une équation du plan (P) contenant (D) et (D') est : $4x + y – z – 1 = 0$.
2) Calculer les coordonnées du point H projeté orthogonal du point B (0 ; 1 ; 1) sur la droite (d).

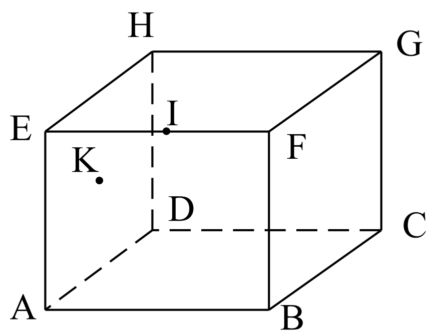
Ex.2

On considère le plan (P) d'équation $3x – 4y + z = 0$ et le point A (–1 ; 5 ; –3).
1) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (d) passant par A
   et perpendiculaire à (P).
2) Soit H le projeté orthogonal de A sur (P). Démontrer que les coordonnées de H sont (2 ; 1 ; –2).
3) Calculer la distance de O à (d).
4) a-Déterminer une équation du plan (Q) perpendiculaire à (P) et contenant les points A et O.
   b- Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite d'intersection de (P) et (Q).

Ex.3

On considère un cube ABCDEFGH d'arête AB = 1.

L'espace est rapporté au repère orthonormé direct (A; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AE}$).
On désigne par I le milieu de [EF] et par K le centre du carré ADHE.



1)a- Calculer l'aire du triangle IGA.

b- Calculer le volume du tétraèdre ABIG.

c- Déduire que la distance du point B au plan (AIG) est égale à $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

2) a- Ecrire une équation du plan (AFH).

b- La droite (CE) coupe le plan (AFH) en un point L.
Calculer les coordonnées de L.

c- Montrer que L est un point de la droite (FK).

d- Montrer que L est le centre de gravité du triangle AFH.

Ex.4

On considère la droite (d) d'équation $x = t - 1$; $y = t + 3$; $z = t + 1$ (t est un paramètre réel).
1) Ecrire une équation du plan (Q) déterminé par le point O et la droite (d).

2) a- Calculer les coordonnées du point H projeté orthogonal du point O sur la droite (d).
b- Montrer que la distance du point O à la droite (d) est égale à $2\sqrt{2}$.

3) (P) est le plan d'équation $(2m - 1)x - my + (1- m)z + 6m - 2 = 0$ (m est un paramètre réel).
a- Vérifier que H appartient à (P).
b- Montrer que (P) contient la droite (d).
c- Calculer, en fonction de m, la distance du point O à (P).

4) Déterminer m pour que la droite (OH) soit perpendiculaire à (P).

Ex.5

On donne le plan (P) d'équation $x - 2y + z + 1 = 0$, et les points A(2 ; - 2 ; - 1) , B(1 ; 0 ; - 2) , et C(2 ; 1 ; - 1).
1) Déterminer une équation du plan (Q) contenant A, B et C.

2) Démontrer que les plans (P) et (Q) se coupent suivant la droite (BC).

3) a- Démontrer que (P) et (Q) sont perpendiculaires.
b - Calculer la distance de A à (BC).

4) Soit (d) la droite définie par $x = t -1$, $y = t+1$, $z = t + 2$, où t est un paramètre réel.
a - Vérifier que d) est incluse dans (P).
b - Soit M un point variable de (d) . Démontrer que l'aire du triangle MBC est indépendante de la position de M sur (d).

Ex.6

On donne le plan (P) d'équation $2x - y + z = 0$ et le plan (Q) d'équation $x + y - z + 2\sqrt{3} = 0$.
Soit (d) la droite d'intersection de (P) et (Q).
1) Démontrer que les deux plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.

2) Écrire un système d'équations paramétriques de la droite (d).

3) On désigne par (C) le cercle du plan (P) de centre O et de rayon 3.
Démontrer que (d) coupe (C) en deux points A et B, et calculer la longueur du segment [AB].

4) On désigne par E le milieu du segment [AB].
a - Écrire un système d'équations paramétriques de la droite (OE).
b - Déterminer les coordonnées du point F symétrique de O par rapport au plan (Q).

Ex.7

Soit la droite (d) : $\dfrac{x+1}{2} = y - 1 = \dfrac{z}{3}$, le plan (P) : $2x + y - z + 1 = 0$ et les deux points A(1 ; -2 ; 3) et B(3 ; 0 ; -1).

1) Calculer le cosinus de l'angle aigu que fait (d) avec (P).

2) Ecrire une équation du plan médiateur (Q) du segment [AB].

3) Calculer le cosinus de l'angle aigu que fait (P) avec (Q).

Ex.8

On donne le plan (P) d'équation $2x + y - 2z - 2 = 0$ et les points A $(-1 ; 1 ; 3)$, B $(1 ; 2 ; 1)$ et C $(0 ; 4 ; 1)$.

1) Montrer que la droite (AB) est perpendiculaire en B au plan (P).

2) Soit (T) le cercle dans le plan (P) de centre B et de rayon $\sqrt{5}$.
Montrer que le point C appartient à (T).

3) Ecrire une équation du plan (Q) déterminé par A, B et C.

4) On désigne par (d) la droite perpendiculaire en C au plan (Q).
a- Donner un système d'équations paramétriques de (d).

b- Calculer la distance de A à (d).

c- Démontrer que la droite (d) est tangente au cercle (T).

Ex.9

On considère le point A (1 ; 0 ; 1) et les deux plans (P) et (Q) d'équations respectives $2x - y - 2 = 0$ et $x + 2y - z = 0$.

1) a- Vérifier que A est un point commun à (P) et (Q).

b- Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (d), intersection de (P) et (Q).

2) a- Donner un système d'équations paramétriques de la droite (D) perpendiculaire en A à (P).

b- Calculer les coordonnées d'un point E de (D) tel que $AE = \sqrt{5}$.

3) a- Montrer que les points B(0 ; –2 ; 0) et C(2 ; 2 ; t) appartiennent à (P). (t est un réel)

b- Calculer t pour que le triangle ABC soit rectangle en B et trouver dans ce cas le volume du tétraèdre EABC.

Ex.10

On donne le plan (P) d'équation $x - 2y + z - 2 = 0$ et les droites (D) et (D') définies par :
(D) : $x = m$; $y = -2m + 1$; $z = m - 2$ et (D') : $x = t + 2$; $y = t - 1$; $z = t - 2$
(m et t sont des paramètres réels).

1) Démontrer que les droites (D) et (D') ne sont pas coplanaires.

2) a- Prouver que (D) est perpendiculaire à (P).
b- Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de (D) et (P).

3) a- Prouver que (D') est contenue dans (P).
b- Le cercle (C) de centre I et de rayon 5 contenu dans le plan (P), coupe la droite (D') en deux points A et B. Calculer les coordonnées de A et B.
c- Soit J le milieu de [AB]. Prouver que (I J) est perpendiculaire à (D) et (D').

Ex.11

On donne :

- les points A (1 ; –2 ; 1) , B (2 ; –1 ; 3) , C(1 ;1 ;4) et H(0 ; 0 ; 2) .
- la droite (d) définie par : $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t + 2 \end{cases}$ (t est un paramètre réel).

1) Ecrire une équation du plan (P) déterminé par les points A, B et C.

2) a- Démontrer que la droite (d) est perpendiculaire au plan (P) en H.

b- Démontrer que H est équidistant de A, B et C.

c- Ecrire un système d'équations paramétriques d'une bissectrice de l'angle AHB.

3) Soit M un point variable de (d) et E (2 ; 2 ; 0) un point fixe de (d).
Pour quelles valeurs de *t* le volume du tétraèdre MABC est-il égal au double de celui du tétraèdre EABC ?