PROIECT DIDACTIC

Clasa : a-XII-a
Profesor: Ostafie Ecaterina
Obiectul : Matematică - Analiză matematică
Subiectul lectiei : Aplicaţii ale integralei definite
Tipul lecţiei : Lecţie de formare de priceperi şi deprinderi de calcul.
Conpetenţe generale :

1. Identificarea unor date si relaţii matematice şi corelarea lor în funcţie de contextul în care au fost definite.
2. Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural sau contextual cuprinse în enunţuri matematice.
3. Utilizarea algoritmilor pentru rezolvarea unor probleme practice.
4. Analiza şi interpretarea caracteristicilor matematice ale unei situaţii problemă în scopul găsirii de strategii pentru optimizarea soluţiilor.
5. Exprimarea caracteristicilor matematice cantitative sau calitative ale unei situaţii concrete şi a algoritmilor de prelucrare a acestora.

Competenţe specifice :

1. Aplicarea calculului diferenţial sau integral în probleme practice.
2. Determinarea ariei unei suprafeţe plane folosind calcul integral şi compararea rezultatelor cu cele obţinute prin aplicarea unor formule cunoscute din geometrie.

Strategia didactică: activ-participativă.

- **Metode şi procedee didactice :**conversaţia euristică , exerciţiul, demonstraţia, munca independentă.
- **Material didactic utilizat :** manual clasa a-XII-a , fişe de lucru .
- **Tipuri de actităţi :** frontală şi individuală.
- **Procedee de evaluare:** analiza răspunsurilor, observarea sistematică a atenţiei ,verificarea cantitativă si calitativă a temei.

Scenariu didactic:

1.Moment organizatoric: Verificarea prezentei elevilor şi notarea absenţelor (dacă sunt) in catalog;

Asigurarea unei atmosfere adecvate pentru buna desfăşurare a orei ;

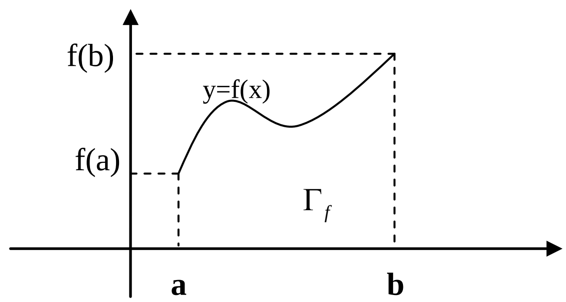
2.Captarea atenţiei: Verificarea temei elevilor prin sondaj folosind dialogul profesor-elev ;elev-elev, prin confruntarea rezultatelor (in cazul in care apar diferente se rezolvă exerciţiile la tablă).

3.Informarea elevilor asupra obiectivelor lecţiei: Se anunţă şi se scrie pe tablă titlul lecţiei: **<u>Aplicaţii ale integralei definite. Aria unui subgafic. Aria regiunii cuprinse între două curbe.</u>**

4. Prezentare de material nou

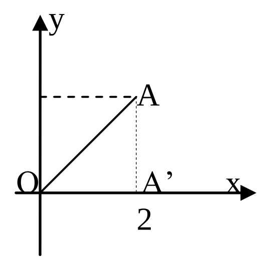
1. Aria unui subgrafic.

Definiţie. Fie $f:[a,b]\to[0,\infty)$ o funcţie continuă. Mulţimea $\Gamma_f=\{(x,y)|a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\}$ se numeşte subgraficul lui f şi reprezintă mulţimea punctelor din plan cuprinse între graficul lui f, axa Ox şi dreptele verticale x = a, x = b.



Teoremă. Dacă $f:[a,b]\to[0,\infty)$ este o funcţie continuă atunci $Aria(\Gamma_f)=\int_a^b f(x)dx$.

Exemple:



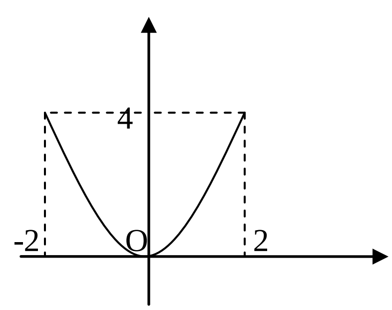
1. Să se calculeze aria subgaficului funcţiei $f:[0,2]\to R, f(x)=x$

Rezolvare: Funcţia f este continuă şi $f(x)\ge 0$ pe intervalul $[0,2]$

$$Aria(\Gamma_f)=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 xdx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2=2$$

Observaţie Aria subgraficului se poate calcula şi geometric:

$$Aria(\Gamma_f)=Aria(\Delta OAA')=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{2\cdot 2}{2}=2.$$



2. Să se calculeze aria subgaficului funcţiei $f:[-2,2]\to R, f(x)=x^2$

Rezolvare: Funcţia f este continuă şi $f(x)\ge 0$.

$$Aria(\Gamma_f)=\int_{-2}^2 f(x)dx=\int_{-2}^2 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^2=\frac{16}{3}.$$

Odservaţie. Dacă $f:[a,b]\to(-\infty,0]$ o funcţie continuă. Deoarece $f\le 0$ deducem că graficul ei este situat sub axa Ox şi în plus $\int_a^b f(x)dx\le 0$. Notăm cu A regiunea din plan cuprinsă între graficul lui f şi axa Ox, atunci convenim ca aria regiunii A să fie egală cu:

$Aria(A) = -\int_a^b f(x)dx = \int_a^b -f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx$. În acest caz mulţimea de puncte delimitată de graficul lui $y = -f(x)$, axa Ox şi dreptele x = a, x = b este simetrica mulţimii A în raport cu axa Ox. Deci cele două mulţimi au aceeaşi arie.

Exemplu: Se consideră funcţia: $f: [0,\infty) \to R,\ f(x) = -\sqrt{x}$ Să se calculeze aria cuprinsă între graficul lui f, axa Ox şi dreptele verticale x = 1, x = 4.

Rezolvare: Funcţia f este continuă şi $f(x) < 0, \forall x \in [1,4]$.

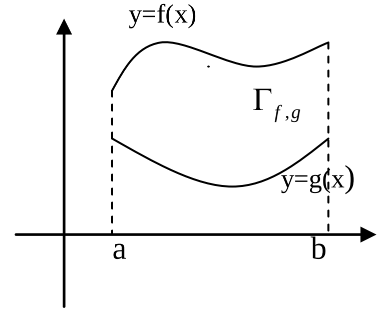
$$Aria(A) = \int_1^4 |f(x)|dx = \int_1^4 \sqrt{x}dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = \frac{14}{3}$$

2. Aria regiunii cuprinse între două curbe.

Teoremă.

Dacă $f, g: [a,b] \to R$ sunt două funcţii continue astfel încât $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a,b]$ atunci mulţimea $\Gamma_{f,g} = \{(x,y) | a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$ cuprinsă între graficele funcţiilor f şi g şi dreptele verticale x = a, y = b are aria:

$$Aria(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$



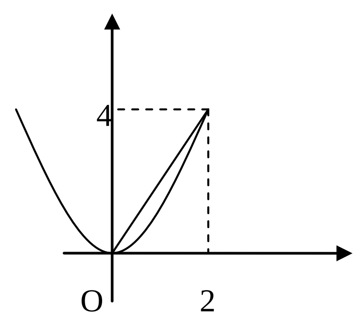
Exemplu: 1. Să se determine aria cuprinsă între dreapta y = 2x şi parabola y = x^2.

Rezolvare : Fie $f: R \to R, f(x) = 2x, g(x) = x^2$. Se determină punctele de intersecţie ale curbelor rezolvând sistemul $\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2x \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} sau \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow$

$G_f \cap G_g = \{A(0,0), B(2,4)\}$

$f(x) - g(x) = 2x - x^2 = x(2-x) \geq 0, \forall x \in [0,2]$

$$Aria(\Gamma_{f,g}) = \int_0^2 (f(x) - g(x))dx = \int_0^2 (2x - x^2)dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$



2. Să se calculeze $Aria(\Gamma_{f,g})$ pentru $f(x) = x^2, g(x) = x^3, x \in [0,1]$.

Rezolvare: Funcţiile f şi g sunt continue pe [0,1] şi

$f(x) - g(x) = x^2(1-x) \geq 0, \forall x \in [0,1] \Rightarrow f(x) \geq g(x), \forall x \in [0,1]$

$$Aria(\Gamma_{f,g}) = \int_0^1 (f(x) - g(x))dx = \int_0^1 (x^2 - x^3)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Observaţie:
Dacă $f, g : [a,b] \to R$ sunt două funcţii continue notăm cu
$\Gamma_{f,g}$ regiunea cuprinsă între graficele funcţiilor f şi g şi dreptele verticale x = a, y = b. Atunci

$$Aria\left(\Gamma_{f,g}\right) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx .$$

Exemplu Să se calculeze aria suprafeţei cuprinse între graficele funcţiilor
$f, g : [0,1] \to R,\ f(x) = x^2, g(x) = e^x$ şi dreptele verticale x = 0, x = 1.
Rezolvare : Funcţiile f şi g sunt continue pe [0,1] şi $f(x) \le 1 \le g(x), \forall x \in [0,1]$

$$Aria\left(\Gamma_{f,g}\right) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \int_0^1 \left|x^2 - e^x\right| dx = \int_0^1 \left(e^x - x^2\right) dx = \left(e^x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = e - \frac{4}{3}.$$

5.Consolidarea cunostinţelor şi asigurarea feed-back-ului : Fiecare elev va primi cate o fişă de lucru .Pe parcursul rezolvării exerciţiilor, profesorul intervine cu întrebări ,adresate atât elevilor de la tablă cât şi celor din clasă, pentru a se clarifica demersul rezolvării.
6.Tema pentru acasă : Se vor propune spre rezolvare ca temă pentru acasă , exerciţiile rămase nerezolvate din fişă .
7.Aprecieri: se noteaza elevii care s-au evidenţiat în timpul orei.