1 | Zykloiden

Abstract:
Herleitung der Formeln für Epizykloide (Kreis rollt außen auf Kreis) und Hypozykloide (Kreis rollt innen auf Kreis). Benötigt(zumindest von Vorteil) für die Durcharbeitung dieses Schriftstücks ist das Programm *Geogebra*. Am Mittelpunkt des abrollenden Kreises sei noch eine mitrotierende "Stange" angebracht. Damit stehen 3 frei wählbare Parameter zur Verfügung:

Kreis k_2 mit Radius r rollt auf k_1 mit Radius R ab. Länge der "Stange" ist ρ

Bevor wir uns mit dem "Rollen" beschäftigen, machen wir es etwas einfacher - wir beschäftigen uns mit

1.1 Gleiten auf einem Kreis

Konzentrieren wir uns vorerst auf den Fall ein Kreis k_2 gleitet außen auf einen anderen Kreis k_1. Auf k_2 befindet sich ein Objekt - dies wird durch den roten Vektor veranschaulicht. Denken Sie sich eine Münze mit einer Zahl oder einem "Kopf" darauf. Damit keine Rollbewegung im Spiel ist fixieren wir beim Gleiten k_2 mit einer blauen Stange! Hier das Geogebra Arbeitsblatt https://www.geogebra.org/m/dnc4J32A - mit dem Schieberegler können Sie den äußeren Kreis gleiten lassen!

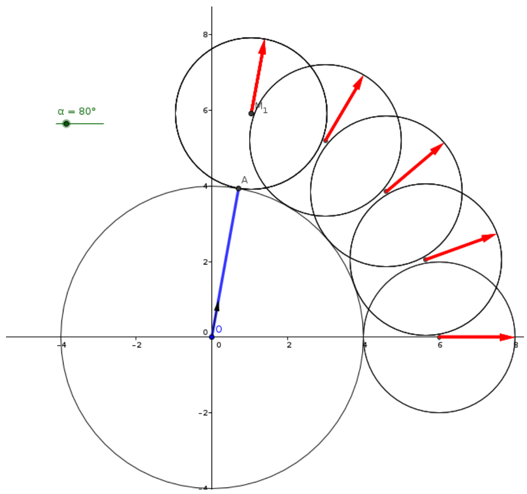

Abb.1 : Gleiten

Halten wir fest: Während in Bezug auf ein mitrotierendes Bezugssystem K_r die Position des Objekts (roter Vektor) unverändert bleibt, führt es im "Zeichenblattsystem" auch eine Drehung aus - und zwar um den gleichen Winkel. Die neue Lage von k_2 ergibt sich also aus einer Translation **plus** einer Drehung - und das **ohne** Rollen. Dasselbe gilt natürlich auch für einen Kreis k_3, der innen gleitet: im Arbeitsblatt M_2 und k_3 auf sichtbar schalten. Wer Lust hat kann auch wieder einen Vektor als "Objekt" einzeichnen.

Es sei

$$\vec{e}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \quad \text{der Einheitsvektor in Richtung } \alpha$$

Ein Punkt P am Spitzenpunkt des roten Vektor hat dann die Koordinaten

$$\vec{p} = \vec{m}_1 + \rho\vec{e}_\alpha = (R+r)\vec{e}_\alpha + \rho\vec{e}_\alpha$$

In unserem Geogebra-Arbeitsblatt heißt $\vec{e}_\alpha$ einfach v_0. Damit können wir leicht die Probe machen, ob wir mit unserer Formel richtig liegen: Wir geben in der Befehlszeile ein:

```
P=(R+r)*v_0 + ρ*v_0
```

Schalten den Schieberegler für ρ sichtbar und betätigen den für α.
Jetzt zum

1.2 Kreis rollt auf Kreis - außen: Epizykloide

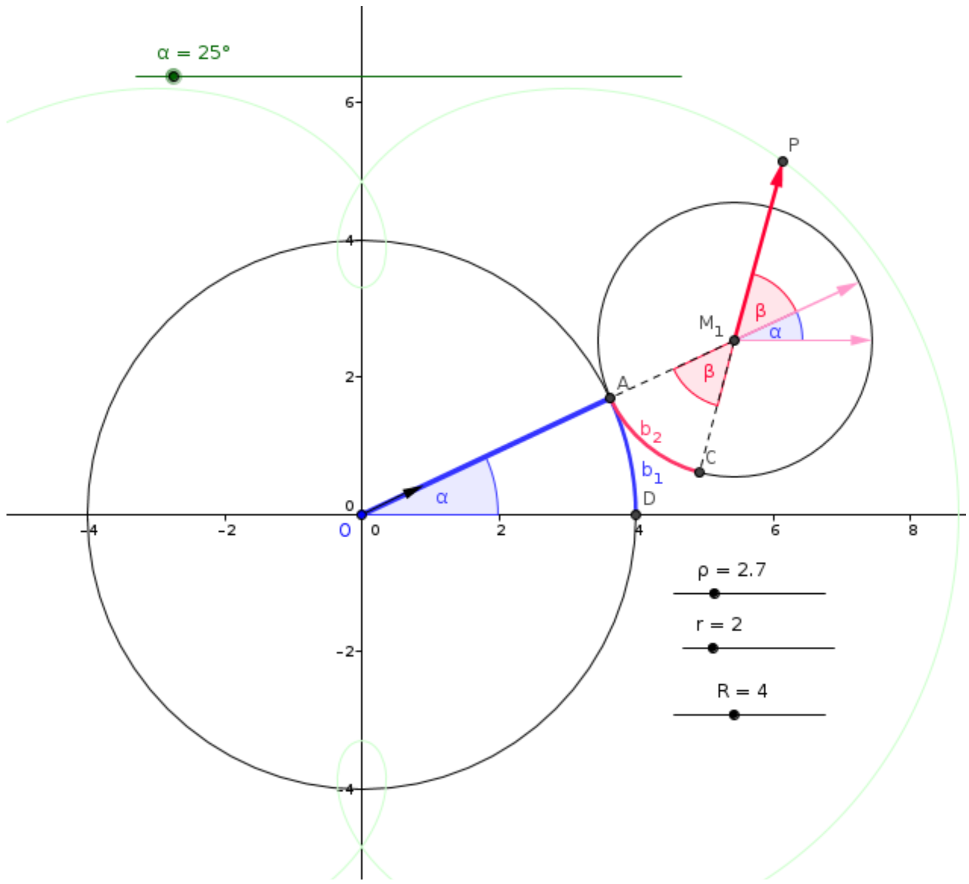

Abb.2 : Rollen - außen

Beim Rollen müssen die zurückgelegten Strecken gleich sein. Es muss also gelten

$$\boxed{b_1 = b_2} \Rightarrow R\,\alpha = r\,\beta \Rightarrow \beta = \frac{R}{r}\alpha$$

Schauen wir uns die "roten" Vektoren an:
waagrecht war die Ausgangsrichtung, um α gedreht ergibt sich allein durch das Gleiten, dazu kommt jetzt eine Drehung um β.
Damit ergeben sich für den Punkt P folgende Koordinaten

$$P = M_1 + \rho\vec{e}_{\alpha+\beta} \quad \text{bzw. ausgeschrieben}$$

$$\boxed{P = (R+r)\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix} \cos\left(\left(1+\frac{R}{r}\right)\alpha\right) \\ \sin\left(\left(1+\frac{R}{r}\right)\alpha\right) \end{pmatrix}}$$

Im folgenden Geogebra Arbeitsblatt https://www.geogebra.org/m/FUbPXQMK ist diese Formel bereits als parametrisierte Kurve k (hellgrün) eingegeben. Wenn man außerdem die Spur von P einschaltet, lässt sich beim Betätigen des Schiebereglers für α leicht die Richtigkeit obiger Formel bestätigen!(oder wählt das Werkzeug *Ortslinie-Locus* klickt anschl. auf P und α)
Mit dem Einstellen der Schieberegler für R, r und ρ lassen sich die verschiedensten *Epizykloiden* erzeugen!

1.2.1 Spezielle Epizykloiden

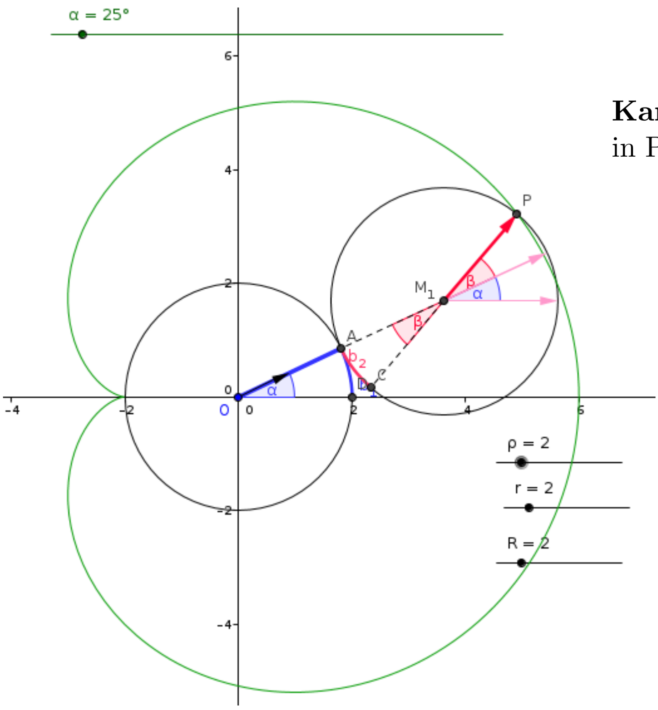

Abb.3 : Kardoide

Kardoide: $R = r = \rho$
in Poloarkoordinaten (mit verschobenen KS):

$$r(\alpha) = R(1 + \cos(\alpha))$$

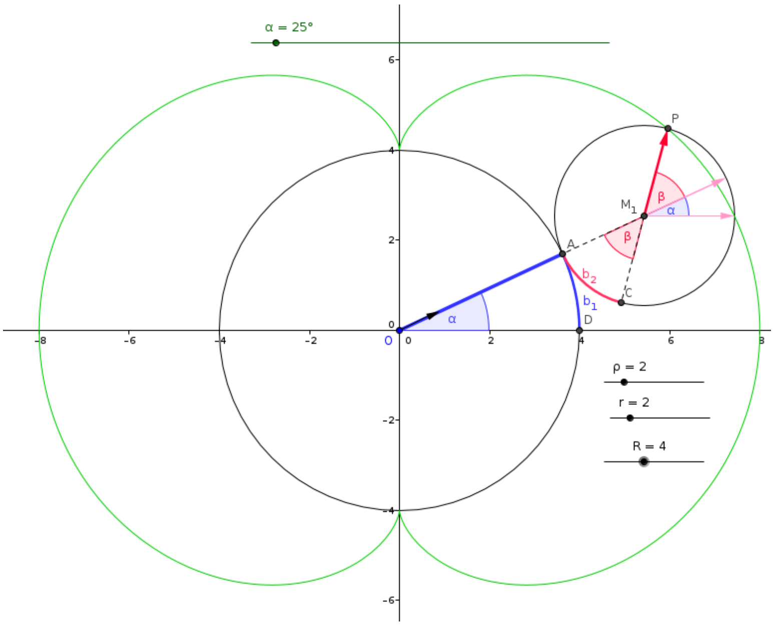

Abb.4 : Nephroide: $r = \rho \quad R = 2r$

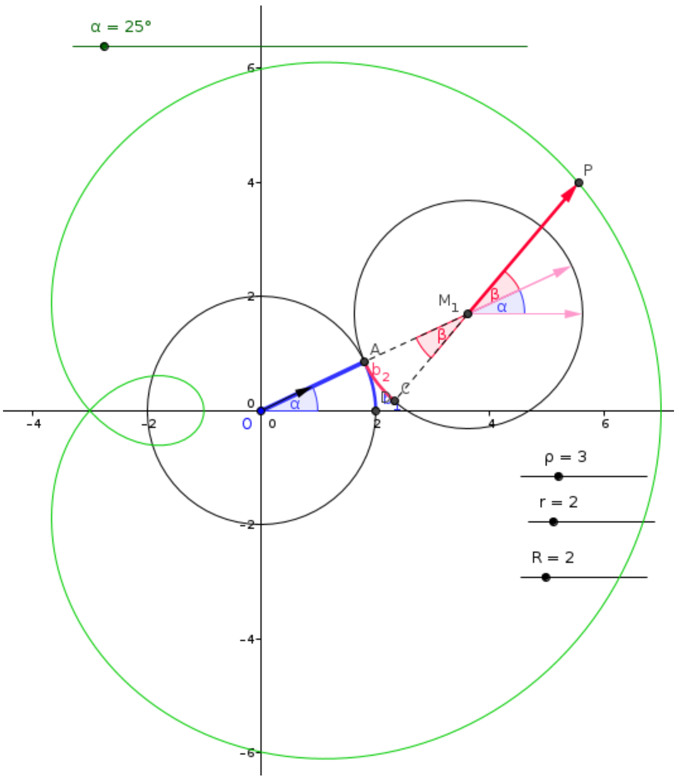

Abb.5 : Pascal-Schnecke(Limacon): $r = R \quad \rho > R$

1.3 Kreis rollt auf Kreis - innen: Hypozykloide

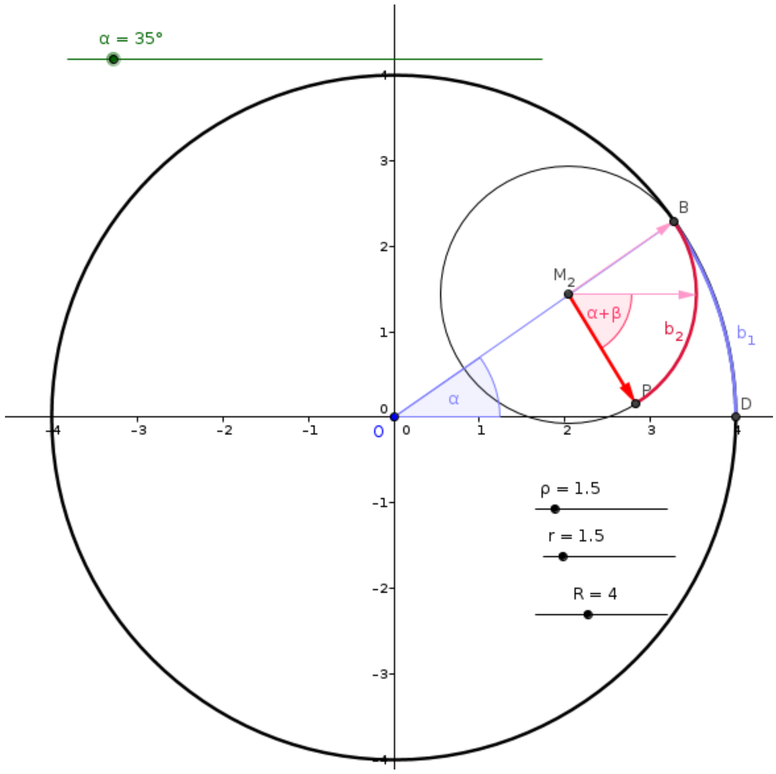

Abb.6 : Rollen - innen

Beim Rollen müssen die zurückgelegten Strecken gleich sein. Es muss also gelten

$$\boxed{b_1 = b_2} \Rightarrow R\,\alpha = r\ |\beta| \Rightarrow |\beta| = \frac{R}{r}\alpha$$

Allerdings ist der Effekt der Gleitbewegung jetzt der Rollbewegung entegegengerichtet! Schauen wir uns die "roten" Vektoren an:
waagrecht war die Ausgangsrichtung, um α gedreht ergibt sich allein durch das Gleiten, dazu kommt jetzt eine neative Drehung um β .
Damit ergeben sich für den Punkt P folgende Koordinaten

$$P = M_2 + \rho\vec{e}_{\alpha-|\beta|} \quad \text{bzw. ausgeschrieben}$$

$$\boxed{P = (R-r)\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix} \cos\left(\left(1-\frac{R}{r}\right)\alpha\right) \\ \sin\left(\left(1-\frac{R}{r}\right)\alpha\right) \end{pmatrix}}$$

Hier wieder das Arbeitsblatt dazu (https://www.geogebra.org/m/kwKVTQft).
Spitzen ergeben sich fü $\rho = r$ und die Anzahl der Spitzen $n = R/r$ - also wenn r ein Teiler von R ist.

1.3.1 Spezielle Hypozykloiden

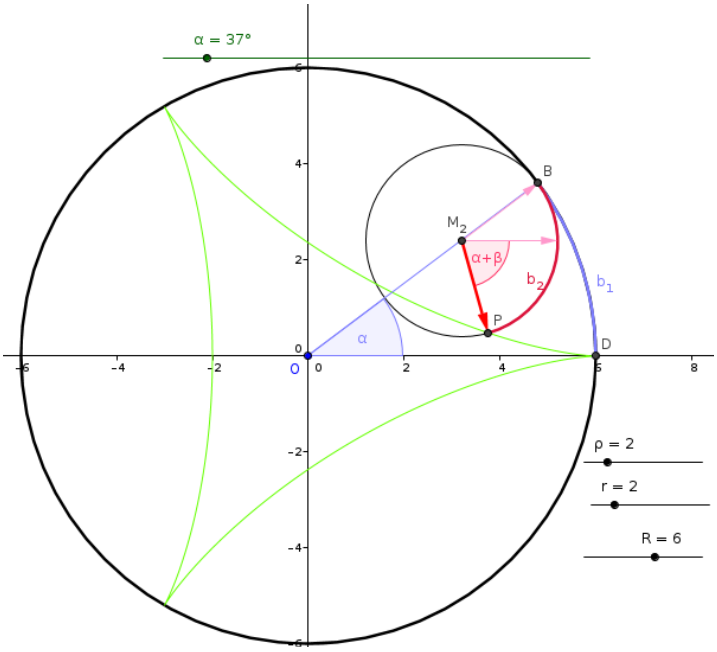

Abb.7 : Tricuspoide: $r = \rho = \dfrac{R}{3}$

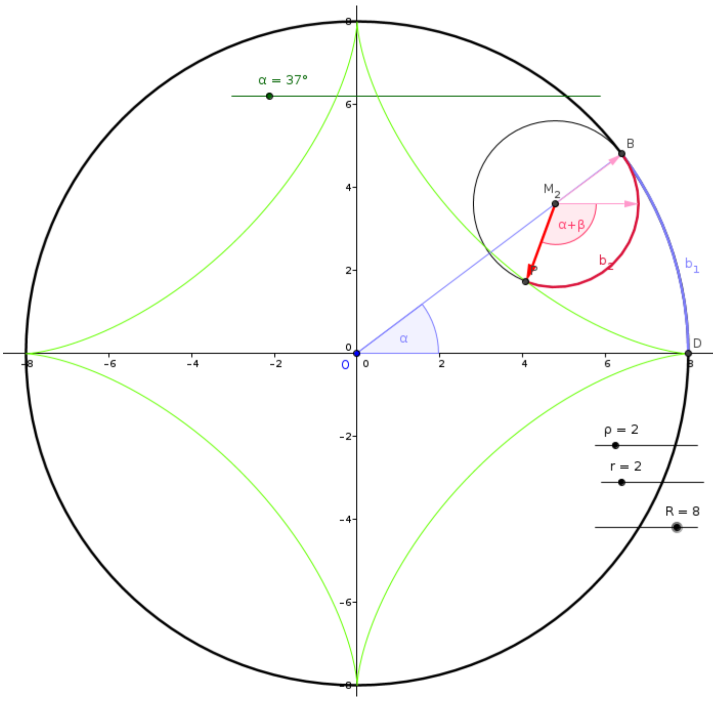

Abb.8 : Astroide: $r = \rho = \dfrac{R}{4}$

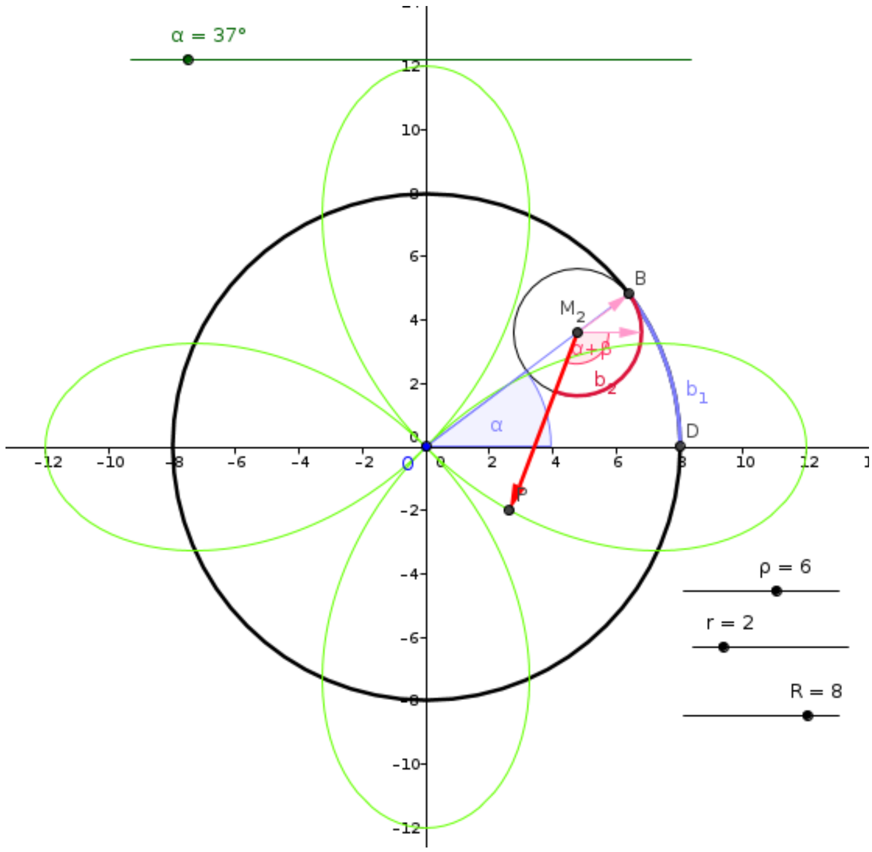

Abb.9 : NoName: $r = \dfrac{R}{4}$ und $\rho > r$