

MATEMATICA INTORNO A NOI

Le rette e la TAC

La TAC (tomografia assiale computerizzata) è una tecnica che sfrutta i raggi X per ricostruire, grazie al computer, immagini tridimensionali di tessuti e organi.

Puoi usare le rette per comprendere il funzionamento della TAC?



LA RISPOSTA

Nel piano cartesiano, consideriamo:

- a. un punto S che si muove con velocità costante v su una retta s di equazione $y = 1$;
- b. un punto P che si muove con velocità costante v' su una retta p di equazione $y = p$, con $0 < p < 1$;
- c. un punto R situato sull'asse x e tale che, a ogni istante t , risulti allineato con S e P .

Supponiamo inoltre che all'istante $t = 0$ l'ascissa di S sia 0 e quella di P sia $x_p > 0$.

Determiniamo la relazione che deve esistere fra le due velocità v e v' affinché il punto R non si muova.

Nelle ipotesi fatte, le posizioni di S e di P dipendono dal tempo t ; in particolare, in ogni istante t , i due punti hanno coordinate:

$$S(vt; 1), P(x_p + v't; p).$$

Per calcolare le coordinate di R possiamo pensare R come intersezione della retta SP con l'asse x . Il coefficiente angolare della retta SP è $\frac{p-1}{x_p + (v'-v)t}$, quindi

l'equazione della retta SP è del tipo $y = \frac{p-1}{x_p + (v'-v)t} x + q$. Possiamo determinare q imponendo la condizione

di appartenenza a tale retta del punto $S(vt; 1)$ e otteniamo: $q = \frac{x_p + (v' - vp)t}{x_p + (v' - v)t}$.

Quindi la retta SP ha equazione

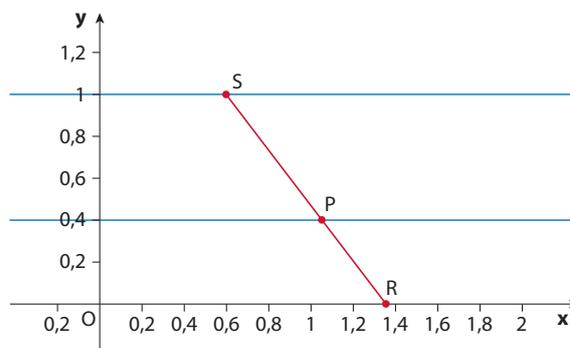
$$y = \frac{p-1}{x_p + (v'-v)t} x + \frac{x_p + (v' - vp)t}{x_p + (v' - v)t}.$$

Calcoliamo l'ascissa del punto R ponendo $y = 0$ nell'equazione della retta SP :

$$x_R = - \frac{x_p + (v' - vp)t}{x_p + (v' - v)t} \cdot \frac{x_p + (v' - v)t}{p-1} = \frac{x_p + (v' - vp)t}{1-p}.$$

Notiamo che in generale x_R varia al variare del tempo; se però $v' = vp$, allora l'ascissa di R è indipendente dal tempo: $x_R = \frac{x_p}{1-p}$. Ciò equivale a dire che il punto $R\left(\frac{x_p}{1-p}; 0\right)$ sta fermo.

Vediamo ora perché l'esercizio appena svolto può dare un'idea del funzionamento delle tecniche di tomografia. Il principio su cui si basa la tomografia è che le strutture di un tessuto o di un organo assorbono i raggi X in modo diverso. Per esempio, quelle più dense, come le ossa, assorbono più facilmente la radiazione rispetto a quelle meno dense, come la pelle. Raccogliendo la radiazione non assorbita su una lastra, si ottiene un'immagine che può essere considerata un po' come l'ombra dell'organo o del tessuto sul quale è stata inviata la radiazione. Basta allora pensare al punto S come a una sorgente di radiazione, al punto P come l'oggetto di cui si vuole ottenere l'immagine e al punto R come l'ombra di P . In ogni istante t , la radiazione emessa da S proietta l'immagine di P sul punto R di una lastra sensibile ai raggi X. Il movimento relativo di sorgente e paziente portano al risultato che solo i punti P appartenenti a una certa sezione piana del tessuto o dell'organo danno luogo a un'immagine ferma e quindi chiara e nitida sulla lastra.



Notiamo, infine, che la condizione che porta all'immagine ferma ($v' = vp$) non dipende dall'ascissa del punto P , ma solo dalla sua ordinata e dalle velocità di S e P . Ciò vuol dire che tutti i punti della retta di equazione $y = p$ proiettano sull'asse x un'immagine ferma.

Questo permette di ottenere in modo nitido l'immagine di una sezione precisa del paziente.

