

Habitació d'Ames

Esborrany d'apunt

RAMON NOLLA & RAMON MASIP
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart
Juliol 2016



1. Introducció

L'habitació d'Ames es construirà projectant de d'un punt O , —ull de l'observador—, les parets, el terra i el sostre de l'habitació virtual que volem percebre sota la forma d'un ortoedre sense cara lateral davantera. El punt O se situa a una distància d de la cara davantera de l'habitació virtual i a una distància a del pla que conté la seva paret esquerra. L'habitació projectada, o sigui l'habitació d'Ames, tindrà les característiques següents:¹

- La paret lateral esquerra coincidirà amb la de la virtual.
- L'aresta vertical posterior dreta serà la projecció de l'aresta virtual vertical posterior dreta, sobre una paral·lela situada a una distància més llunyana de l'ull O de l'observador.
- L'aresta vertical davantera serà la projecció de la corresponent aresta virtual de manera que amb l'aresta de l'apartat anterior es trobaran en un pla paral·lel a la paret virtual dreta.

Amb tot això l'habitació d'Ames queda determinada. Llavors, si mirem amb un ull des del centre O de projecció, la percebrem com una habitació virtual en forma d'ortoedre. També percebrem a les persones o objectes situats al cantó dret de la cara posterior, més petits que si se situen al cantó esquerre d'aquesta cara.

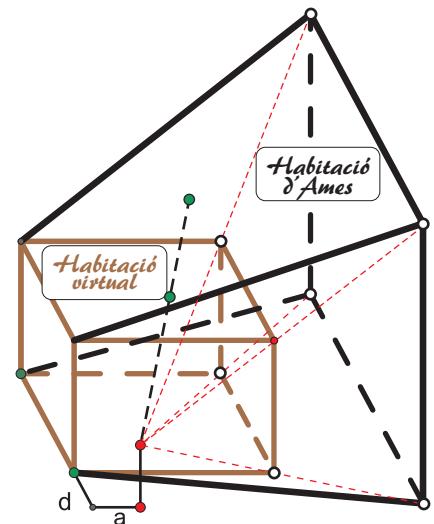
A partir d'aquí, de cara a la creació d'unes eines del GeoGebra que permetin construir les tres parets, el sostre i el terra, es presenten dos problemes. Utilitzarem el llenguatge analític, considerant uns sistemes de coordenades adequats. Concretament, cercarem les equacions de,

Problema 1. La projecció, des d'un punt, d'un pla, (paret virtual), en un de paral·lel, (paret d'Ames o real). Aquestes serviran per a la construcció de la paret dreta de l'habitació.

Problema 2. La projecció entre dos plans secants, (virtual i real), des d'un punt. Aquestes serviran per a la paret posterior, el sostre i el terra de l'habitació.

El primer problema és el de resolució més senzilla perquè consisteix en les equacions d'una semblança. Si consulteu atentament el document GeoGebra enllaçat,² podreu veure'n el desenvolupament.

La resolució del segon problema requereix una mica més de feina i en fem el desenvolupament.³



¹Trobareu documentació ampliada a <http://ggbm.at/aSJUnKyp>

²<http://ggbm.at/r3dYEGKD>. Activeu successivament totes les caselles de control.

³Podreu trobar una presentació en el document GeoGebra <http://ggbm.at/uwU8asvu>.

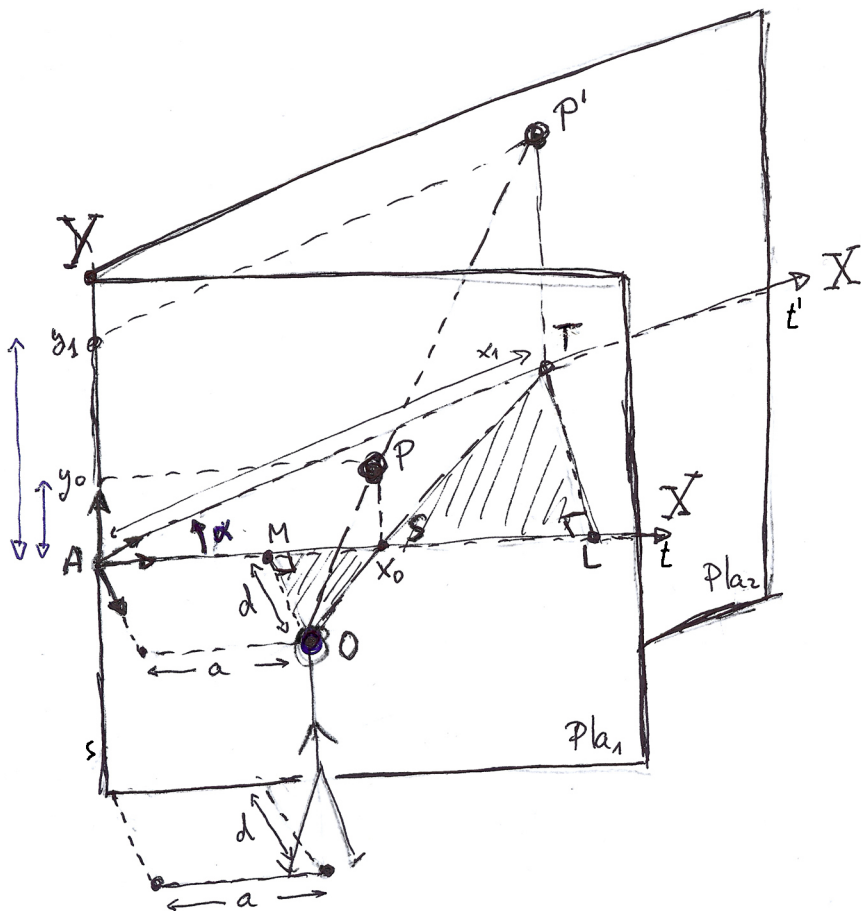
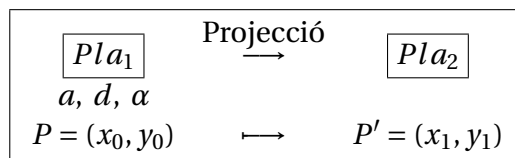
2. Projecció entre dos plans secants des d'un punt exterior

En la imatge de sota es presenta la projecció, des del punt O (ull de l'observador), entre els plans Pla_1 i Pla_2 secants, que transforma el punt $P \in Pla_1$ en el punt $P' \in Pla_2$. Amb les notacions de distàncies, coordenades i punts que presentem, deduirem les seves equacions.⁴

Considerem,

- s : recta resultant de la intersecció dels dos plans, $Pla_1 \cap Pla_2$.
- t : línia de l'horitzó en el Pla_1 : Intersecció del Pla_1 amb el pla, per O , perpendicular a s
- t' : línia de l'horitzó en el Pla_2 : Intersecció del Pla_2 amb el pla, per O , perpendicular a s .
- A : Intersecció de s i t
- M : Intersecció de t amb la recta que passa per O i és perpendicular al Pla_1 .

Paràmetres	Referències	Variables
$d = OM$	$Pla_1 : \text{Ref}_1\{A; AX, AY\}$	$P = (x_0, y_0)$
$a = AM$	$Pla_2 : \text{Ref}_2\{A; AX', AY'\}$	$P' = (x_1, y_1)$
$\alpha = \text{angle}(Pla_1, Pla_2)$		



⁴Vegeu també el document GeoGebra <http://ggbm.at/uwU8asvu>

- **Càlcul de x_1 .** Observem que del triangle $\triangle ATL$ s'obté,

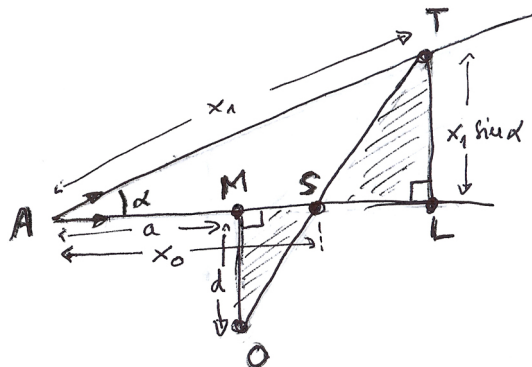
$$TL = x_1 \cdot \sin \alpha, \quad AL = x_1 \cdot \cos \alpha, \quad SL = AL - AS = x_1 \cdot \cos \alpha - x_0.$$

Llavors dels triangles $\triangle OMS$ i $\triangle TLS$ semblants, s'obté,

$$\frac{TL}{OM} = \frac{SL}{SM} \iff \frac{x_1 \cdot \sin \alpha}{d} = \frac{x_1 \cdot \cos \alpha - x_0}{x_0 - a}.$$

Per tant,

$$x_1 = \frac{d \cdot x_0}{d \cos \alpha - (x_0 - a) \cdot \sin \alpha}.$$



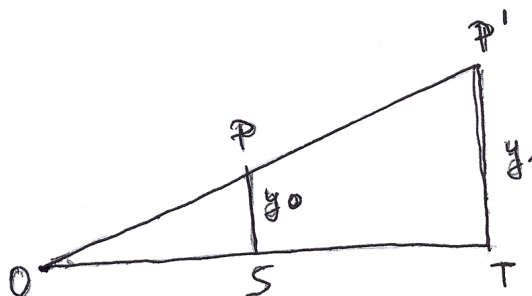
- **Càlcul de y_1 .** Si observem els triangles $\triangle OPS$ i $\triangle OP'T$ semblants, s'obté,

$$\frac{y_1}{y_0} = \frac{P'T}{PS} = \frac{OT}{OS} = \frac{OS + ST}{OS} = 1 + \frac{ST}{OS} = 1 + \frac{TL}{OM} = 1 + \frac{x_1 \sin \alpha}{d} \implies$$

$$y_1 = y_0 \cdot \frac{d + x_1 \sin \alpha}{d} = y_0 \cdot \frac{d + \frac{d x_0 \sin \alpha}{d \cos \alpha - (x_0 - a) \sin \alpha}}{d} = y_0 \left(1 + \frac{x_0 \sin \alpha}{d \cos \alpha - (x_0 - a) \sin \alpha} \right).$$

D'aquí finalment obtenim,

$$y_1 = \frac{(d \cos \alpha + a \sin \alpha) y_0}{d \cos \alpha - (x_0 - a) \cdot \sin \alpha}.$$



- **Conclusió.** Les equacions de la projecció des de O entre els plans Pla_1 i Pla_2 , virtual i real o d'Ames, en les referències i paràmetres indicats han resultat ser,

$$\begin{array}{ccc} Pla_1 & \xrightarrow{\text{Projecció}} & Pla_2 \\ P = (x_0, y_0) & \longmapsto & P' = (x_1, y_1) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{d \cdot x_0}{d \cos \alpha - (x_0 - a) \cdot \sin \alpha} \\ y_1 = \frac{(d \cos \alpha + a \sin \alpha) y_0}{d \cos \alpha - (x_0 - a) \cdot \sin \alpha} \end{array} \right.$$

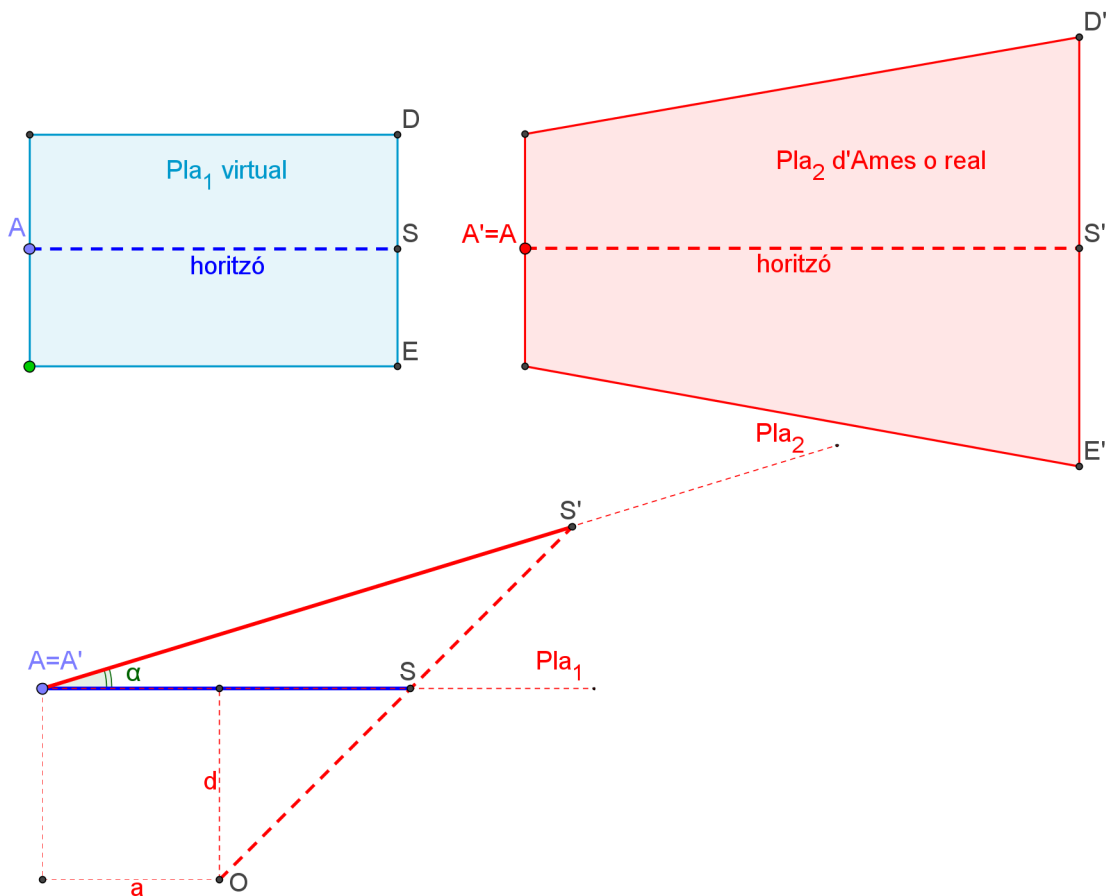
Amb aquestes equacions podem passar a crear en el GeoGebra l'eina que transforma un punt P del pla virtual Pla_1 en un punt P' del pla d'Ames Pla_2 .

3. Creació de l'eina projecció entre dos plans secants. Eina Ames

La representació dels dos plans es farà construint el Pla_1 virtual i el Pla_2 d'Ames separats en la mateixa pantalla. Això implica que l'origen de referència A dels dos plans es trobarà en llocs diferents de la pantalla, que anomenarem A i A' . El protocol de construcció de l'eina que transforma $P \in Pla_1$ en $P' \in Pla_2$ serà el següent:

Protocol de la construcció		Eina Ames
Punt A	↔ Origen de referència en el pla virtual	Objectes d'entrada A, A', P, d, a, α
Punt A'	↔ Origen de referència en el pla d'Ames	
Punt P	↔ Punt per projectar	
Nombre d	↔ distància OM	
Nombre a	↔ distància AM	
Nombre α	↔ angle entre els dos plans O de F	Objectes de sortida P'
Nombre x_0	↔ abscissa $x(P) - x(A)$ de P en Ref_1	
Nombre y_0	↔ ordenada $y(P) - y(A)$ de P en Ref_1	
Nombre x_1	↔ abscissa $\frac{d \cdot x_0}{d \cos \alpha - (x_0 - a) \cdot \sin \alpha}$ de P en Ref_2	
Nombre y_1	↔ ordenada $\frac{(d \cos \alpha + a \sin \alpha) y_0}{d \cos \alpha - (x_0 - a) \cdot \sin \alpha}$ de P' en Ref_2	
Punt P'	↔ $(x(A') + x_1, y(A') + y_1)$	

- Representació de la finestra GeoGebra on s'ha aplicat l'eina Ames sobre el Pla_1 ⁵



⁵Vegeu <http://ggbm.at/Ht7s26aY>