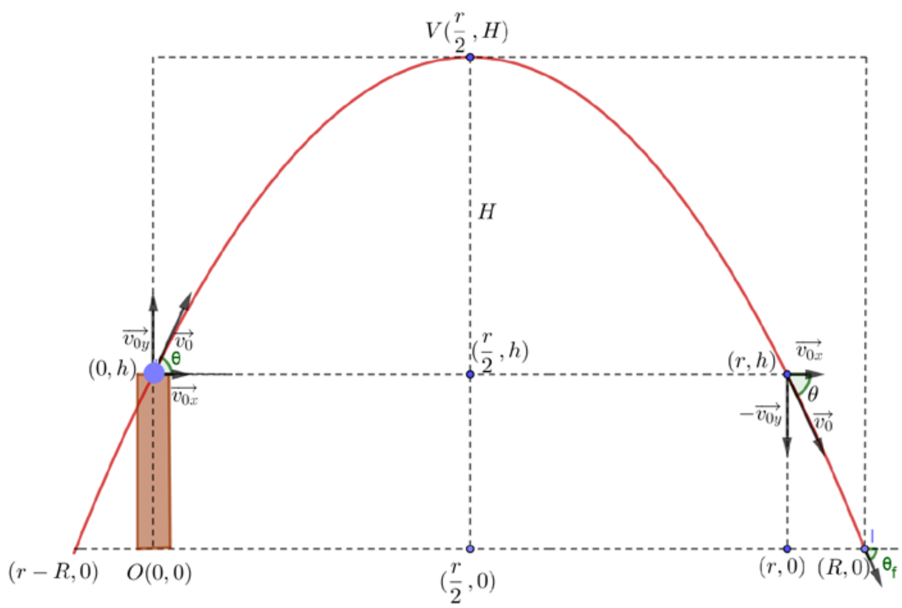
Aruncarea de la h și aterizarea la nivelul solului



Se folosesc notațiile:

$O(0,0)$ – punctul de aruncare, nivel h

$B(R,0)$ – punctul de sosire, nivel 0 (nivelul solului)

R – distanța parcursă (pe orizontală)

T – timpul

H – înălțimea maximă până la care ajunge obiectul

V – vârful parabolei (punct de întoarcere)

A – proiecția lui V pe axa Ox

Mișcarea totală pe orizontală depinde de v_{0x}, h, θ

Aflarea lui r

Deplasarea pe verticală: $y = h + v_{0y}t - \dfrac{gt^2}{2}$ (mișcare uniform variată, accelerația constantă)

Deplasarea pe orizontală: $x = v_{0x}t$ (mișcare uniformă, viteza constantă) $\Rightarrow t = \dfrac{x}{v_{0x}}$.

Inlocuim și obținem $y = h + v_{0y} \cdot \dfrac{x}{v_{0x}} - \dfrac{g}{2} \cdot \dfrac{x}{{v_{0x}}^2}$

Dar $v_{0x} = v_0 \cos\theta,\ v_{0y} = v_0 \sin\theta$ și înlocuind mai sus obținem $y = h + \mathrm{tg}\,\theta \cdot x - \dfrac{g}{2{v_0}^2 \cos^2\theta} \cdot x^2$.

Se observă că dreapta de ecuație $y = h$ intersectează parabola în punctele de abscise $0,\ r$ adică 0 și r sunt rădăcinile ecuației $\mathrm{tg}\,\theta \cdot x - \dfrac{g}{2{v_0}^2 \cos^2\theta} \cdot x^2 = 0$ obținând soluțiile $x = 0$ și $x = \dfrac{{v_0}^2 \sin 2\theta}{g}$, de unde rezultă $r = \dfrac{{v_0}^2 \sin 2\theta}{g}$.

Aflarea timpului t

Deplasarea se termină atunci când proiectilul ajunge pe sol, adică $y = 0$. Înlocuim în relația deplasării pe verticală și t este soluția pozitivă a ecuației $-\dfrac{gt^2}{2} + v_{0y}t + h = 0$, adică $T = \dfrac{v_{0y} + \sqrt{{v_{0y}}^2 + 2gh}}{g}$ $(*)$
.

Notăm cu T_r timpul deplasării până în punctul (r, h). Atunci $r = T_r \cdot v_{0x}$, de unde $T_r = \dfrac{r}{v_{0x}}$.

Înlocuind r și v_{0x} rezultă $T_r = \dfrac{{v_0}^2 \sin 2\theta}{g v_{0x}} = \dfrac{{v_0}^2 \cdot 2\sin\theta\cos\theta}{g v_0 \cos\theta}$, de unde $T_r = \dfrac{2v_0 \sin\theta}{g}$.

Aflarea înălțimii maxime H

Proiectilul atinge înălțimea maximă H când $t = \dfrac{T_r}{2}$ (din simetrie), $x = \dfrac{r}{2}$, $y = H$ și $v_y = 0$. Dar $v_y = v_{0y} - gt$, de unde $v_{0y} = gt = \dfrac{gT_r}{2}$. Înlocuind în formula deplasării pe verticală rezultă $H = h + gt \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}$, de unde $H = h + \dfrac{gt^2}{2}$. Dar $t = \dfrac{v_0 \sin\theta}{g}$, de unde rezultă $H = h + \dfrac{{v_0}^2 \sin^2\theta}{2g}$ (1).

Din (1) rezultă ${v_0}^2 \sin^2\theta = (H - h)2g$ sau ${v_{0y}}^2 = 2g(H - h)$, de unde $v_{0y} = \sqrt{2g(H - h)}$.

Înlocuind în $(*)$ rezultă $T=\frac{\sqrt{2g(H-h)}+\sqrt{2g(H-h)+2gh}}{g}$, de unde $T=\frac{\sqrt{2g(H-h)}+\sqrt{2gH}}{g}$ (2).

Din $x=v_{0x}\cdot t$ rezultă $R=v_0\cos\theta\cdot T$ sau $R=\frac{v_0\cos\theta\left(\sqrt{2g(H-h)}+\sqrt{2gH}\right)}{g}$ (3).

Atunci $v_0=\frac{Rg}{\cos\theta\left(\sqrt{2gH}+\sqrt{2g(H-h)}\right)}$ sau $v_0=\frac{R\left(\sqrt{2gH}-\sqrt{2g(H-h)}\right)}{2gh\cos\theta}$ (4)

Fie $\overrightarrow{v_i}=\overrightarrow{v_{ix}}+\overrightarrow{v_{iy}}$ viteza în punctul $(r-R,0)$, iar $\overrightarrow{v_f}=\overrightarrow{v_{fx}}+\overrightarrow{v_{fy}}$ viteza în punctul $(R,0)$. Din simetrie avem $\overrightarrow{v_{ix}}=\overrightarrow{v_{fx}}$ și $\overrightarrow{v_{iy}}=-\overrightarrow{v_{fy}}$. Atunci $h=0$ și $y=v_{fy}\cdot t-\frac{gt^2}{2}$, iar $H=y_{\max}=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{{v_{fy}}^2}{2g}$ de unde ${v_{fy}}^2=2gH$ (5) sau $v_{fy}=\sqrt{2gH}$.

Dar $v_{fy}=v_f\sin\theta_f$ implică $v_f\sin\theta_f=\sqrt{2gH}$ (6) sau ${v_f}^2\sin^2\theta_f=2gH$.

Pe orizontală avem deplasare uniformă, deci componenta vitezei pe orizontală este constantă, adică $v_{fx}=v_{0x}$ de unde $v_f\cos\theta_f=\frac{R}{T}$. Înlocuim în (6) și obținem $\frac{R}{T}\operatorname{tg}\theta_f=\sqrt{2gH}$ de unde $\operatorname{tg}\theta_f=\frac{T\sqrt{2gH}}{R}$ sau $\theta_f=\operatorname{arctg}\left(\frac{T\sqrt{2gH}}{R}\right)$ (7).

Din (5) și (6) avem ${v_f}^2={v_{fx}}^2+{v_{fy}}^2=\left(\frac{R}{T}\right)^2+2gH$, de unde $v_f=\sqrt{\left(\frac{R}{T}\right)^2+2gH}$ (8) sau $v_f=\sqrt{{v_0}^2\cos^2\theta+2gH}$ $(8')$.