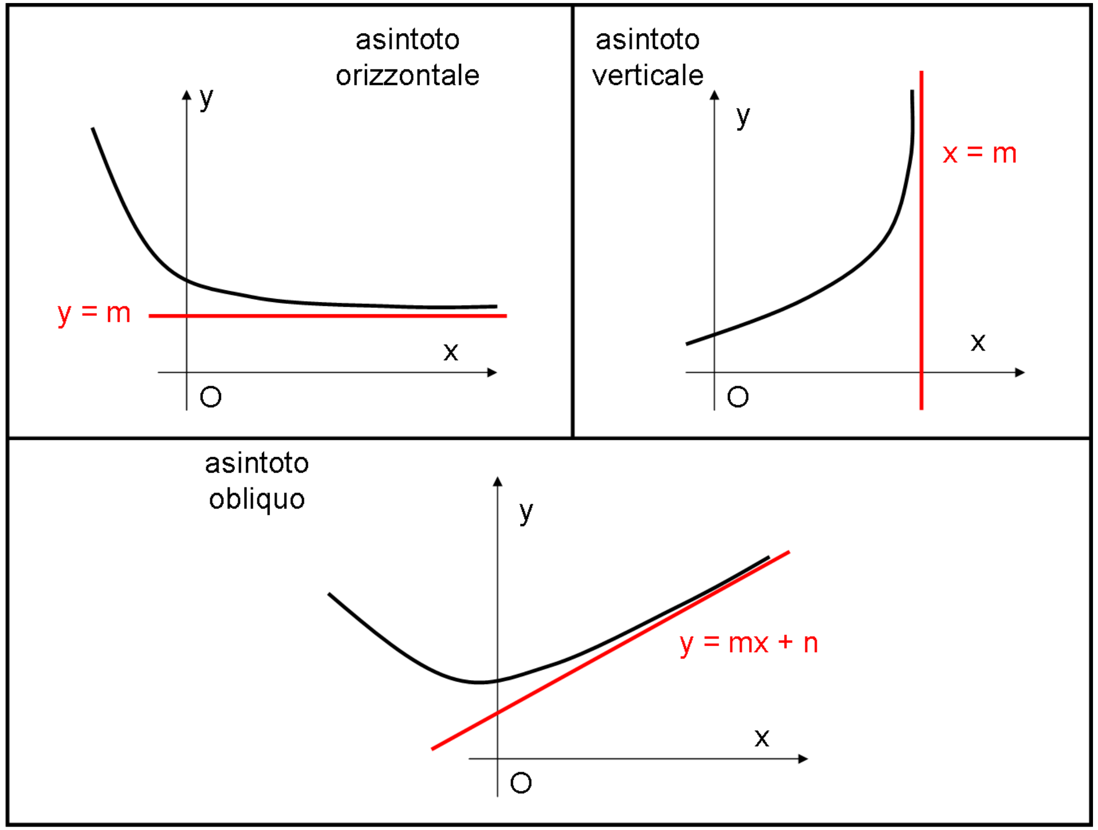
Gli asintoti

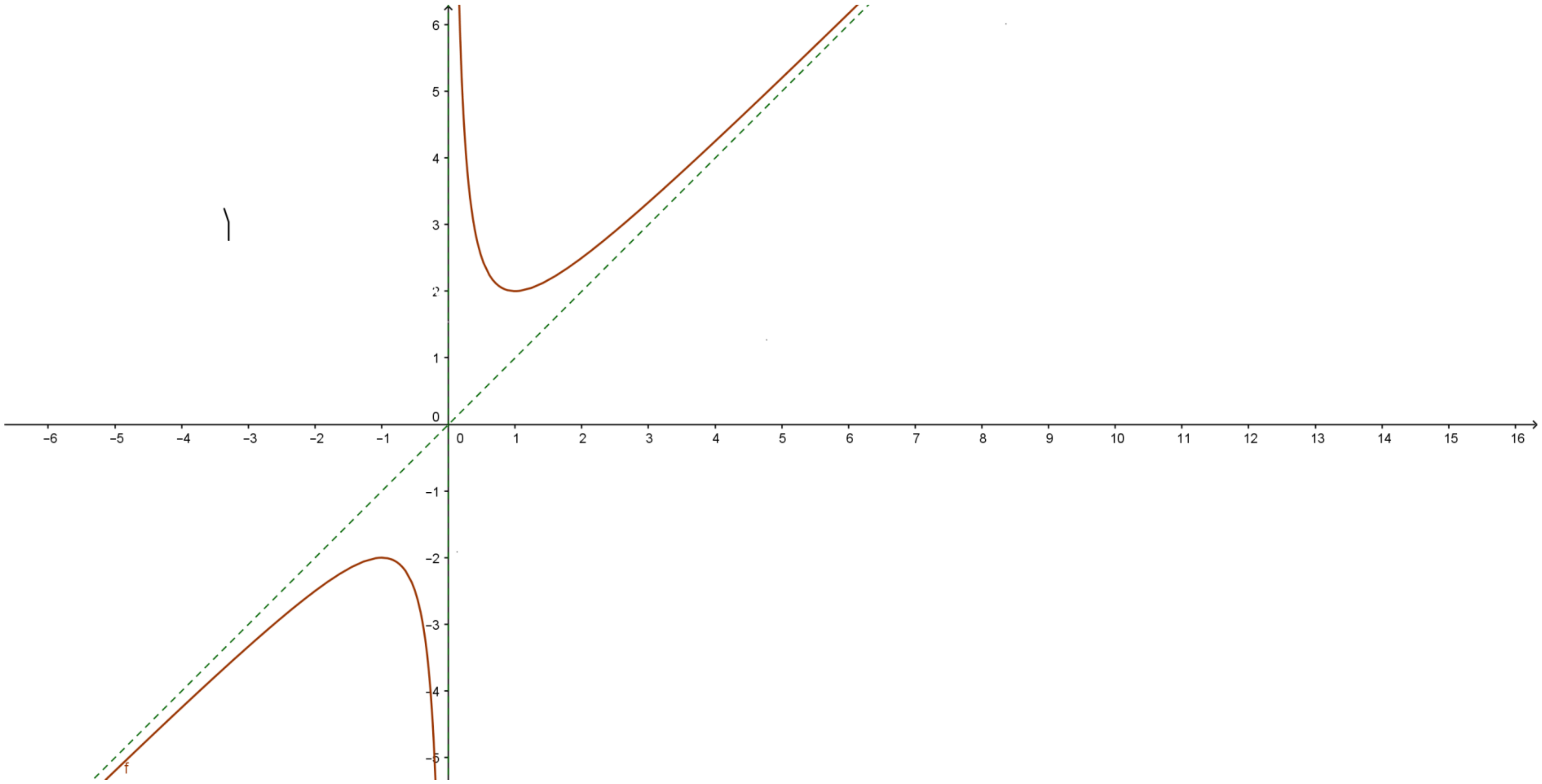
Richiami ed esempi

Scheda asintoti

- Definizioni generali di asintoto orizzontale, verticale e obliquo
- Scrivere l'equazione di una funzione di una variabile dotata di due asintoti, uno orizzontale ed uno obliquo, oppure entrambi obliqui, ma distinti
- Rappresentarla con Geogebra
- Applicare la definizione agli esercizi forniti in classe



$$y = x + 1/x$$

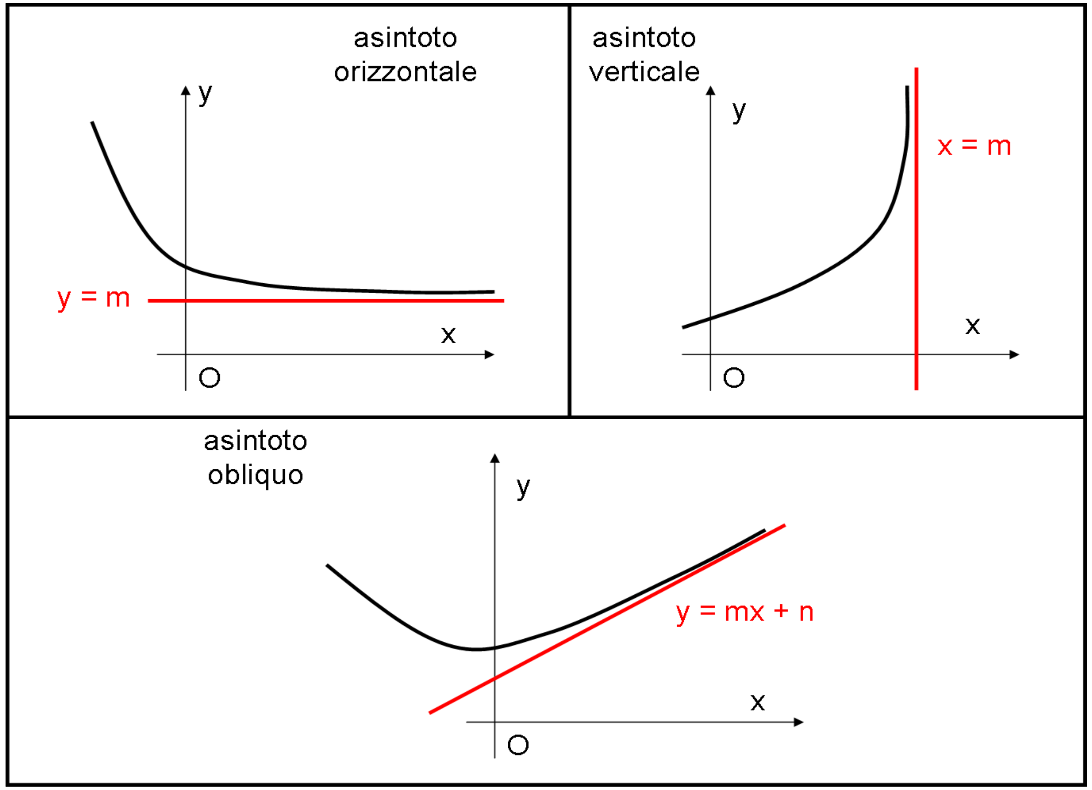


Lezione: dettaglio argomenti

Definizioni generali

- cosa significa asintoto: “qualcosa che non si riesce mai a toccare” (retta a cui la funzione si avvicina sempre più ma che riuscirà a toccare solo all’infinito; definizione più geometrica…. è la tangente nel punto all’infinito della nostra funzione
- l’asintoto orizzontale: si ha quando facendo tendere x a infinito, la y tende a un **valore costante**, ossia a una retta del tipo **y = cost**; L’asintoto è, appunto, orizzontale dato che la retta è una retta orizzontale

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = m = \text{cost}$$



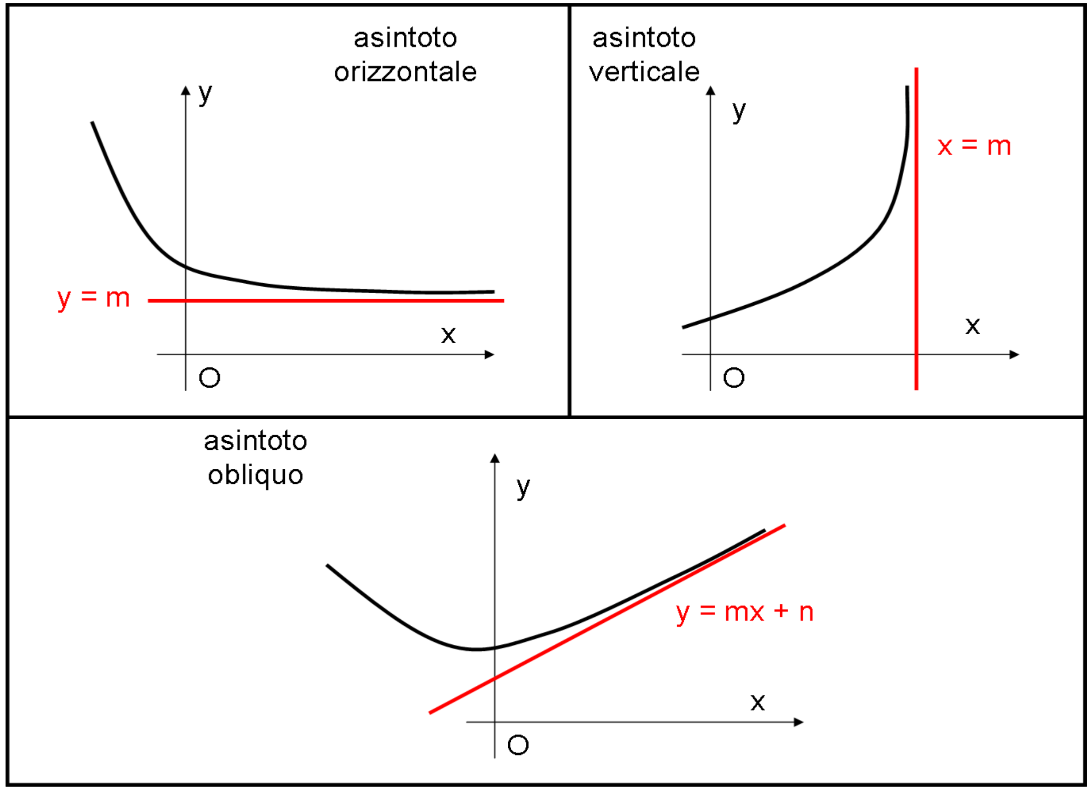
Esempio svolto

- $y = 2x/(x-5)$
- Esiste un asintoto orizzontale? Eseguiamo il limite per x che tende a ∞.
- $\lim_{x\to\infty} (2x/(x-5))$
- Abbiamo immediatamente una forma indeterminata del tipo ∞/∞ che si risolve immediatamente dato che numeratore e denominatore hanno lo stesso grado e, quindi, il limite non è altro che il rapporto tra i termini del grado massimo, ossia:
- $\lim_{x\to\infty} (2x/(x-5)) = 2/1 = 2$
- L'asintoto orizzontale è quindi dato dalla retta $y = 2$.
- La funzione ammette lo stesso asintoto anche per x che tende a meno infinito. Infatti vale sempre:
- $\lim_{x\to-\infty} (2x/(x-5)) = 2/1 = 2$

Lezione: dettaglio argomenti

Definizioni generali

- cosa significa asintoto: “qualcosa che non si riesce mai a toccare” (retta a cui la funzione si avvicina sempre più ma che riuscirà a toccare solo all’infinito; definizione più geometrica…. è la tangente nel punto all’infinito della nostra funzione
- l’asintoto verticale: si ha quando facendo tendere x ad un valore finito, la y tende all’infinito, ossia a una retta del tipo **x = cost**; L’asintoto è, appunto, verticale dato che la retta è una retta verticale
- $\mathbf{\lim_{x \to m} f(x) = \infty}$



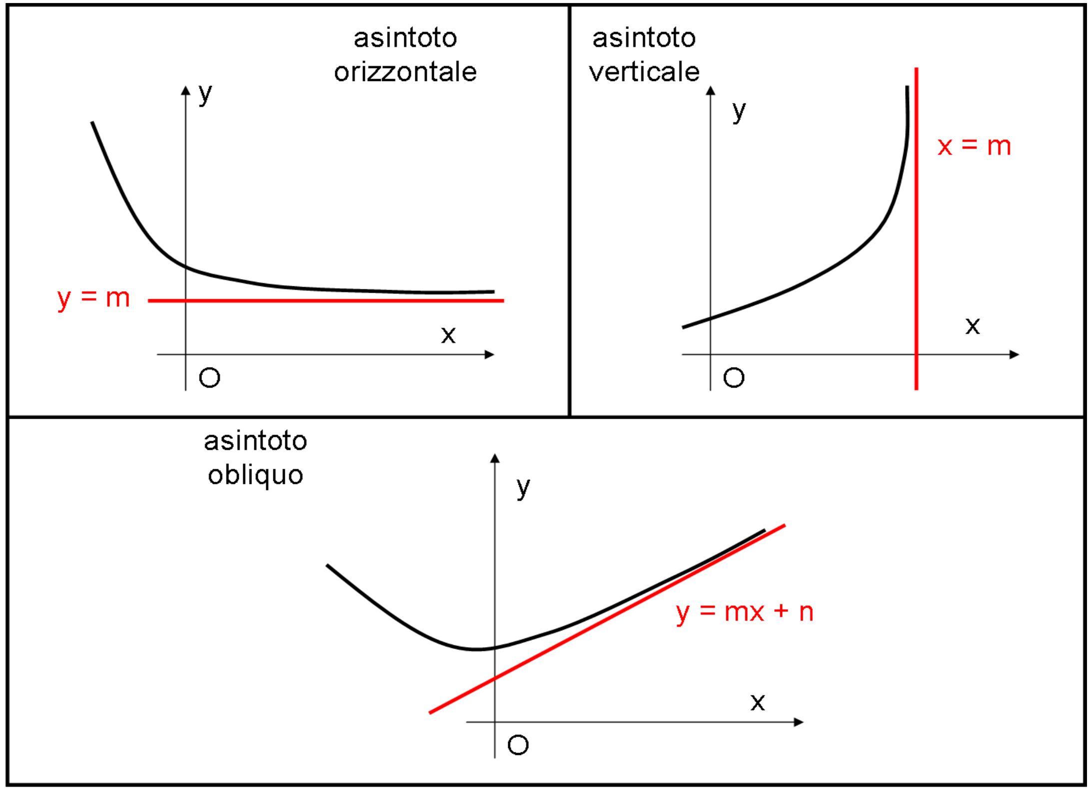
Esempio svolto

- Dato che la y deve andare a infinito, gli asintoti saranno dati dalle x che **annullano** il denominatore (ma non anche il numeratore…). Solo in queste condizioni la y va a infinito
- Stiamo molto attenti a far tendere a m la x sia **da sinistra** che **da destra**, dato che il segno di infinito può cambiare completamente
- Nel caso y = 1/(x-1) abbiamo risultati opposti. Per x che tende a 1 da sinistra (ossia provenendo da numeri minori di 1) il denominatore è un numero sempre più piccolo, ma negativo e tale è quindi anche l'infinito a cui tende y. Per x che tende a 1 da destra (numeri più grandi di 1) l'infinito è sempre positivo e quindi la funzione tende a infinito verso l'alto
- La funzione y = 1/(x-1) ha quindi un solo asintoto verticale (x = 1), ma a destra di questa retta la funzione tende a + ∞, mentre a sinistra la funzione tende a - ∞
- Ben diversa sarebbe la soluzione per $y = 1/(x-1)^2$
- In questo caso la differenza (x – 1) può diventare maggiore o minore di zero provenendo da sinistra o da destra, ma il suo quadrato è sempre positivo e quindi, sia prima che dopo l'asintoto, la funzione tende ad andare verso l'alto, ossia verso + ∞

Lezione: dettaglio argomenti

Definizioni generali

- l'asintoto obliquo: **rette qualsiasi verso cui tende la nostra funzione mentre la x sta andando all'infinito**
- **$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$**
- molte funzioni la soddisfano, pur senza avere asintoti obliqui (ad esempio la parabola)
- La retta asintoto, se esiste, ha comunque un'equazione del tipo:
- $y = mx + q$
- al tendere di x all'infinito, la funzione f(x) deve "toccare" questa retta
- $\lim_{x \to \infty} (f(x) – (mx + q)) = 0$
- **$\text{Lim}_{x \to \infty} f(x)/x = m$**
- **$\lim_{x \to \infty} (f(x) – mx) = q$**
- per determinare se una funzione ha un asintoto obliquo basta calcolare i due limiti, Se essi danno un risultato finito, la risposta è SI e ne forniscono i coefficienti atti a definire la retta



Esempio svolto

- $y = (2x^2 - 1)/x$
- Vale sicuramente
- $\lim_{x \to \infty} (2x^2 - 1)/x = \infty$
- Proviamo a calcolare m
- $m = \lim_{x \to \infty} (2x^2 - 1)/x^2 = 2$
- Il numeratore e il denominatore hanno lo stesso grado e il risultato è il rapporto tra i coefficienti dei termini di grado superiore.
- Proviamo a calcolare n
- $n = \lim_{x \to \infty} ((2x^2 - 1)/x – 2x) = \lim_{x \to \infty} (2x^2 – 1 – 2x^2)/x = \lim_{x \to \infty} (– 1/x) = 0$
- Perfetto!
- Esiste l'asintoto obliquo e ha equazione
- **$y = 2x$**

Breve discussione sull’esistenza degli asintoti

- In realtà è abbastanza semplice capire subito, guardando la funzione, se essa ha asintoti orizzontali, obliqui o ne è priva: basta confrontare l’ordine di infinito del numeratore e del denominatore.
- Infatti, se essi sono dello stesso ordine il limite della funzione sarà uguale al rapporto tra i due coefficienti dei termini di grado superiore. Ossia avremo un asintoto orizzontale, del tipo $y = m$.
- Se, invece, il denominatore ha ordine superiore, il limite dà come risultato zero e quindi l’asintoto orizzontale è del tipo $y = 0$.
- Esiste un asintoto obliquo se il numeratore è un infinito di **un solo ordine** superiore al denominatore. Infatti, quando si moltiplica il denominatore per x l’ordine si pareggia e il valore di m sarà un numero finito.
- Infine, se il numeratore ha un ordine superiore di due o tre o più di quello del denominatore, m non può che essere infinito e non vi può essere asintoto obliquo.
- L’esistenza di un asintoto verticale è immediatamente evidenziata se esiste un valore finito di x che annulla solo il denominatore.