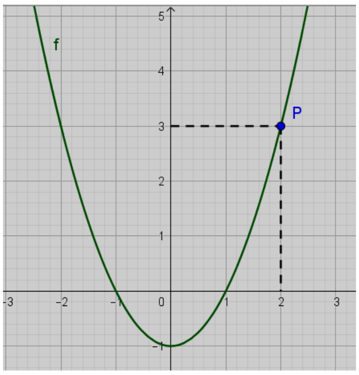
LIMITES DE FUNÇÕES E INDETERMINAÇÕES

Prof. Júnior Duarte

Na função $f(x) = x^2 - 1$, com domínio no conjunto dos números Reais, para qualquer valor de x pertencente ao conjunto dos números reais, teremos um valor de y definido na função.

Por exemplo, se $x = 2$, teremos: $f(2) = 2^2 - 1 = 3$, ou seja, a **imagem** de $x = 2$ na função é $y = 3$, ou ainda $f(2) = 3$.

Graficamente os pontos que obtemos para esta função representam uma parábola. O ponto P, de coordenadas (2, 3), cujas coordenadas acabamos de determinar está em destaque no gráfico da função:



Se observarmos outro caso, como a função $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$. Nesse exemplo, não podemos considerar o domínio sendo o conjunto dos números Reais, pois esta função não está definida para x = 1, ou seja, o domínio dessa função poderia assumir todos valores reais para x, menos o valor 1. Dizemos que $o\ domínio\ são\ todos\ valores\ de\ x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 1$. Dessa forma não é possível determinar um valor para y quando x = 1. Vejamos o cálculo de g(1) que evidencia que x=1 não está no domínio da função:

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$g(1) = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

Por que x = 1 não faz parte do domínio da função? Reflita: Como calcular $\frac{0}{0}$? Essa divisão chamamos de ***INDETERMINAÇÃO MATEMÁTICA***. Em uma linguagem mais comum, dizemos que ***NÃO É POSSÍVEL DIVIDIR UM NÚMERO REAL POR ZERO.***

Mas, como não é possível realizar divisão de um número real por ***ZERO***, e não conseguimos obter o valor da função quando x = 1, será que conseguimos obter o limite dessa função quando x tende a 1? Vamos analisar essa função quando ela assume valores de ***x*** *muito próximos de 1*, em outras palavras o que queremos entender é:

- O que acontece com a função ***g(x)*** quando ***x*** admite valores muito próximos de 1 *(na vizinhança de 1)*, porém ***DIFERENTES de 1.***

Para compreender essa questão, vamos atribuir valores ***menores*** que 1 para ***x***, mas muito próximos a ele. Assim, teremos a seguinte tabela para os valores que estão à ***esquerda*** de ***1.***

x	*0*	*0,5*	*0,75*	*0,9*	*0,99*	*0,999*	*0,9999*
g(x)	*1*	*1,5*	*1,75*	*1,9*	*1,99*	*1,999*	*1,9999*

A seguir atribuímos valores ***maiores*** que 1 para ***x***, mas muito próximo a ele. Assim, teremos a seguinte tabela para os valores que estão à ***direita*** de ***1.***

x	*2*	*1,5*	*1,25*	*1,1*	*1,01*	*1,001*	*1,0001*
g(x)	*3*	*2,5*	*2,25*	*2,1*	*2,01*	*2,001*	*2,0001*

Observe que ao *admitir* ***x*** *cada vez mais próximo do número 1, tanto à direita quanto à esquerda, encontramos valores para* ***g(x)*** *cada vez mais próximos de* ***2. Pelas tabelas podemos afirmar*** que: "***o limite da função g(x) quando x se aproxima de (tende para) 1, é igual a 2".***

Em símbolos temos: $\lim_{x \to 1} g(x) = 2$ ou $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

Essas tabelas evidenciam que existe limite de g(x) quando x tende a 1, mesmo que não exista número real para a função quando x = 1. Nas tabelas ficam evidenciados o que chamamos de ***LIMITES LATERAIS*** *da função g(x).*

- Quando ***x*** tende a *1* por valores ***menores*** do que *1* (Primeira tabela), dizemos que *x* tende a *1* ***pela esquerda***, e denotamos simbolicamente por:

$\lim_{x \to 1^-} g(x) = 2$ ou $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

OBS.: O sinal negativo no expoente do número 1, sinaliza que ***x*** se aproxima de 1 pela esquerda.

- Quando ***x*** tende a *1* por valores ***maiores*** do que *1* (segunda tabela), dizemos que *x* tende a *1* ***pela direita***, e denotamos simbolicamente por:

$\lim_{x \to 1^+} g(x) = 2$ ou $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

OBS.: O sinal positivo no expoente do número 1, sinaliza que ***x*** se aproxima de 1 pela direita.

A partir do que foi apresentado podemos **DEFINIR** que:

*"O limite de uma função **f(x)**, quando **"x"** se aproxima de um valor qualquer **"a"**, será igual a um valor **L**,* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ *, se e somente se, os **limites laterais** (esquerda e direita) de **"a"** forem **IGUAIS** a **L**, ou seja,* $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ *, caso contrário o limite **NÃO EXISTE** (∄).*

Sempre será necessário construir *tabelas com aproximações* para determinar o limite de uma função, nos casos de indeterminação?

A resposta é não! Para justificar esta resposta, iremos calcular o limite da função *g*(x), sem usar tabelas.

Exemplo: Determine $\lim_{x \to 1} g(x)$, onde $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

"Já vimos que a substituição direta nos conduz à 0/0".

$$g(1) = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

Então, se não quisermos elaborar as tabelas com aproximações para determinar o valor do limite, precisaremos usar uma outra estratégia, eliminando a indeterminação na substituição do x = 1 na função.

Uma alternativa, quando existe limite real, é simplificar expressões, realizando fatorações. Por exemplo, no caso da função g(x), podemos fatorar a expressão (x^2 – 1). Você lembra como podemos fatorar esta expressão? Vejamos...

Sempre que temos a diferença entre dois quadrados (diferença entre dois números elevados ao quadrado), temos que: $x^2 - a^2 = (x - a) . (x + a)$. Vamos ver como ficaria o cálculo na função g(x) ao fatorar a expressão (x^2 – 1):

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} = x + 1, \quad sendo\ x \neq 1.$$

Então, para calcular o limite da função teremos:

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Assim: $\lim_{x \to 1} g(x) = 2$

Observem que a indeterminação “sumiu” e conseguimos obter o valor do limite usando outra estratégia, além da elaboração daquela em que usamos tabelas com aproximações. As duas alternativas são válidas.

Observe graficamente esta função e analise se o limite da função quando x tende a 1, é mesmo 2. Também observe se realmente a função não é definida para x=1. O simulador dessa função está disponível da agenda.