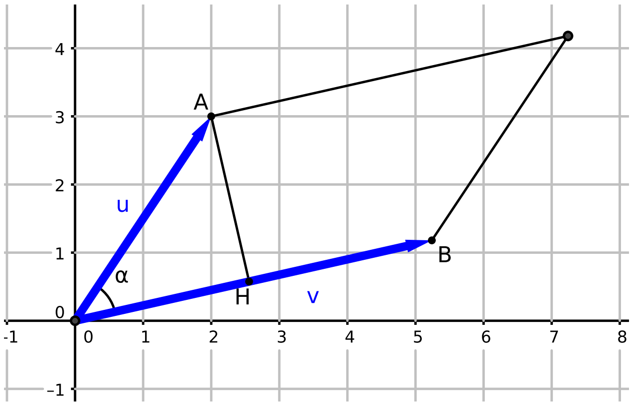
Dimostriamo la seguente proprietà.

Proprietà. *Il parallelogramma che ha per lati due vettori* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *ha area pari al modulo del prodotto vettoriale tra* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$*:*

$$\boxed{\text{Area paralleogramma} = \| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \|}$$

Inoltre se indichiamo con α *l'angolo tra i due vettori si ha* $\boxed{\| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \| = \| \mathbf{u} \| \cdot \| \mathbf{v} \| \cdot \sin(\alpha)}$

Dimostrazione. Consideriamo il parallelogramma in figura, dove $\mathbf{u} = A$ e $\mathbf{v} = B$ sono due lati, α è l'angolo tra essi e H è la proiezione di A su $\mathbf{v}$.



Indichiamo con $\mathcal{A}$ l'area del parallelogramma.

Si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^2 &= (\| \mathbf{v} \| \cdot \| \mathbf{u} \| \ \sin(\alpha))^2 \\ &= \| \mathbf{v} \|^2 \cdot \| \mathbf{u} \|^2 \ \sin^2(\alpha) \\ &= \| \mathbf{v} \|^2 \cdot \| \mathbf{u} \|^2 \cdot \big(1 - \cos^2(\alpha)\big) \\ &= \| \mathbf{v} \|^2 \cdot \| \mathbf{u} \|^2 - \| \mathbf{v} \|^2 \cdot \| \mathbf{u} \|^2 \cos^2(\alpha) \\ &= \| \mathbf{v} \|^2 \cdot \| \mathbf{u} \|^2 - (\| \mathbf{v} \| \cdot \| \mathbf{u} \| \cos(\alpha))^2 \\ &= \| \mathbf{v} \|^2 \cdot \| \mathbf{u} \|^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})^2\end{aligned}$$

Sviluppiamo ora i conti sostituendo le coordinate dei due vettori:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^2 &= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \cdot (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \\ &= u_1^2v_1^2 + u_2^2v_1^2 + u_3^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_2^2 + u_1^2v_3^2 + u_2^2v_3^2 + u_3^2v_3^2 + \\ &\quad - (u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 + 2u_1v_1u_2v_2 + 2u_1v_1u_3v_3 + 2u_2v_2u_3v_3) \\ &= u_2^2v_1^2 + u_3^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + u_3^2v_2^2 + u_1^2v_3^2 + u_2^2v_3^2 - 2u_1v_1u_2v_2 - 2u_1v_1u_3v_3 - 2u_2v_2u_3v_3 \\ &= (u_1v_2 - u_2v_1)^2 + (u_1v_3 - u_3v_1)^2 + (u_2v_3 - u_3v_2)^2 \\ &= \| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \|^2\end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto che $\mathcal{A} = \| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \|$.

Inoltre uguagliando gli ultimi passaggi dei due precedenti conti si ha che

$$\begin{aligned}\| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \|^2 &= \| \mathbf{v} \|^2 \cdot \| \mathbf{u} \|^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})^2 \\ &= \| \mathbf{v} \|^2 \cdot \| \mathbf{u} \|^2 - \| \mathbf{v} \|^2 \cdot \| \mathbf{u} \|^2 \cos^2(\alpha) \\ &= \| \mathbf{v} \|^2 \cdot \| \mathbf{u} \|^2 \ (1 - \cos^2(\alpha)) \\ &= \| \mathbf{v} \|^2 \cdot \| \mathbf{u} \|^2 \ \sin^2(\alpha)\end{aligned}$$

Ovvero

$$\| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \| = \| \mathbf{u} \| \cdot \| \mathbf{v} \| \ \sin(\alpha)$$

□

In maniera analoga si può dimostrare che il volume del prisma in cui tre spigoli sono dati dai vettori $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ si ottiene con la seguente formula:

$$\boxed{\text{Volume prisma} = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \right|}$$