Aplicaciones de las integrales dobles

Ampliación de matemáticas

1. Área de una región plana

Sea R una región del plano cualquiera,

$$\text{Área}(R) = \int\int_R 1\, dxdy$$

2. Volumen de un sólido

- El volumen del sólido (S) acotado inferiormente por $R \in \mathbb{R}^2$ y superiormente por la gráfica de $f : R \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (función no negativa en R), viene dado por:

$$\text{Volumen}(S) = \int\int_R f(x,y)\, dxdy$$

- Si S es la región sólida acotada por las superficies $\begin{cases} z = g_1(x,y) \\ z = g_2(x,y) \end{cases}$, cuya intersección proyectada sobre el plano $z = 0$ es la región R y se cumple que $g_2(x,y) \geq g_1(x,y) \quad \forall (x,y) \in R$,

$$\text{Volumen}(S) = \int\int_R (g_2(x,y) - g_1(x,y))\, dxdy$$

3. Masa, momentos de inercia y centro de masa de una lámina plana

Denotamos por $d : R \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ (continua) la densidad de la lámina plana que corresponde a la región R.

- La masa de la lámina viene dada por,

$$m = \int\int_R d(x,y)\, dxdy$$

- Los momentos respecto de los ejes X e Y se definen como

$$M_x = \int\int_R y\, d(x,y)\, dx\, dy \text{ y } M_y = \int\int_R x\, d(x,y)\, dx\, dy$$

- El centro de masa es: $\left(\dfrac{M_y}{m}, \dfrac{M_x}{m}\right)$

- Los momentos de inercia respecto de los ejes X e Y vienen dados por:

$$I_x = \int\int_R y^2\, d(x,y)\, dx\, dy \text{ e } I_y = \int\int_R x^2\, d(x,y)\, dx\, dy$$

4. Área de una superficie

Si $f : R \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y sus primera derivadas parciales son continuas en la región cerrada y acotada R, el área de la superficie (S) dada por $z = f(x,y)$ sobre R es

$$\text{Área}(S) = \int\int_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$