Exponentielle (1) SV + SG

Equations et inéquations exponentielles :

Ex.1

1) Résoudre dans IR *les équations suivantes :*

a) $e^{2x}-3e^{x}-4=0$. *b)* $e^{-2x}+3e^{-x}-4=0$.

c) $e^{x}-4e^{-x}+3=0$.

2) Résoudre dans IR *les inéquations suivantes :*

a) $e^{2x}-2e^{x}-3\leq 0$.

b) $e^{2x}-3e^{x}+2>0$.

Intégrales exponentielles :

Ex.2

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_{0}^{\ln 2}\frac{e^{x}}{1+e^{x}}dx$ *2)* $\int_{0}^{-\ln 3}\frac{1+e^{x}}{e^{x}}dx$ *3)* $\int_{0}^{\ln 2}(x+1)e^{2x}dx$

4) $\int_{0}^{\ln 3}\frac{x}{e^{x}}dx$ *5)* $\int_{0}^{\ln 3}(x^{2}+1)e^{x}dx$

(Dans la suite, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct ($O;\vec{i};\vec{j}$ *)).*

Problèmes

1. *Soit f la fonction définie sur IR par f(x) = (x – 1)e^x + 1 et (C) sa courbe représentative.*

1) a- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *et déduire une asymptote (d) à (C).*

b- Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (d).

c- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et donner f(2) sous forme décimale.*

2) Calculer f '(x) et dresser le tableau de variations de f.

3) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion W dont on déterminera les coordonnées.

4) a- Tracer (d) et (C).

b- Discuter graphiquement, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de l'équation $(m-1)e^{-x}=x-1$.

5) Calculer l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations x = 0 et x = 1.

6) a- Montrer que la fonction f admet sur [0 ; + ∞[une fonction réciproque g et tracer la courbe représentative (G) de g dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

b- Trouver l'aire du domaine limité par (G), l'axe des ordonnées et la droite (d

2. *On considère la fonction f définie sur* IR *par* $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, *et l'on désigne par (C) sa courbe représentative . (unité 2 cm) .*

1) Vérifier que f(x) + f(-x) = 0 et déterminer le centre de symétrie de (C) .

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ *en déduire les asymptotes de (C).*

3) Calculer f '(x) et dresser le tableau de variations de f.

4) Écrire une équation de la tangente (D) en O à (C).

5) Tracer (D) et (C).

6) a- Calculer les réels a et b de sorte que, pour tout réel x, f(x) = a + $\dfrac{be^x}{1+e^x}$.

b- Calculer l'aire S du domaine (δ) limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = ln3.

c- Calculer le volume engendré par la rotation de (δ) autour de l'axe des abscisses.

7) On désigne par f^{-1} *la fonction réciproque de f dans* IR.

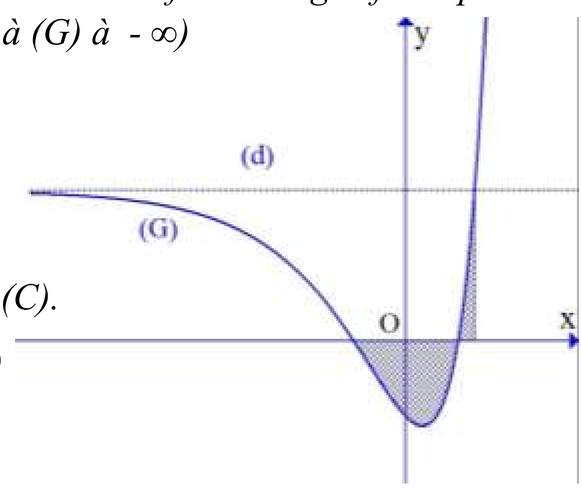
a - Déterminer le domaine de définition de f^{-1} *et trouver* $f^{-1}(x)$.

b - Tracer la courbe (G) représentative de f^{-1}.

8) Soit F la fonction définie, pour tout x, par F(x) = $\int_0^x f(t)dt$

Etudier le sens de variations de F et le signe de F(x) suivant les valeurs de x.

3. A) *La courbe (G) ci-dessous est la courbe représentative de la fonction g définie par* $g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$. *(La droite (d) est une asymptote à (G) à - ∞)*
Calculer l'aire du domaine hachuré.



B) *Soit f la fonction définie sur]0, +□[par*
f(x) = $2x - 2 + \dfrac{1}{e^x - 1}$ *et (C) sa courbe représentative.*

1) a- Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ *et déduire une asymptote à (C).*

b- Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ *et montrer que la droite (d) d'équation y = 2x – 2 est une asymptote à (C).*

c- Quelle est la position relative de (C) et (D) ?

2) a-Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$

b- Dresser le tableau de variations de f.

3) Tracer (D) et (C).

4) Vérifier que $\dfrac{1}{e^x - 1} = \dfrac{e^x}{e^x - 1} - 1$ *et calculer l'aire du domaine limité par (C), la droite (d) et les deux droites d'équations x = ln2 et x = ln3.*

4. *Soit f la fonction définie sur]1 ; +∞[par* $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. *En déduire les asymptotes de (C).*

2) Vérifier que $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)}$ *et dresser le tableau de variations de f.*

3) Tracer (C).

4) a- Démontrer que f admet une fonction réciproque g dont on déterminera le domaine de définition.

b- Démontrer que $g(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$.

c- (G) est la courbe représentative de g dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. *Tracer (G).*

5) Soit h la fonction définie sur]1 ; +∞[par h(x) = xf(x).

a- Vérifier que $f(x) = h'(x) + \frac{2x}{x^2 - 1}$ *et déterminer sur]1 ; +∞[une primitive de f.*

b- Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations x = 2 et x = 3.

5. *Partie A*

Soit g la fonction définie, sur IR, par $g(x) = (1-x)e^{-x} + 1$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2) Dresser le tableau de variations de g. En déduire que g(x) > 0 pour tout réel x.

Partie B

1) On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = xe^{-x} + x$.

a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite (d) d'équation y = x est une asymptote à (C).

c) Étudier la position de (C) par rapport à (d).

2) a) Vérifier que f '(x) = g(x) et dresser le tableau de variations de f.

b) Etudier la concavité de (C) et vérifier qu'elle admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

c) Déterminer le point E de (C) où la tangente (T) à (C) est parallèle à (d). *(dans la suite on note par* y_E *l'ordonnée de E)*

d) Tracer (d), (T) et (C).

3) Considérons la fonction h définie par $h(x) = \ln(y_E - f(x))$.

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Dresser le tableau de variation de h.

4) Calculer l'aire A, du domaine limité par (C), (d), et les deux droites d'équations (x = - 1) et (x = 1).

6. *A) On considère la fonction g, définie sur* $\mathbb{R}$, *par g(x) =* $e^x - x + 1$.

1) a- Calculer $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ *et* $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

2) a- Calculer $g'(x)$ *et dresser le tableau de variations de g.*

b- En déduire que g(x) > 0 pour tout réel x.

B) On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, *par f(x) =* $xe^{-x} + x - 1$ *et on désigne par (C)*

sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j})$. *(Unité 2 cm)*

1) a- Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

b- Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *et vérifier que la droite (d) d'équation y = x –1 est une asymptote à (C).*

c- Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (C) avec son asymptote (d)

et étudier la position relative de (C) et (d).

2) a- Montrer que f '(x) = $\dfrac{g(x)}{e^x}$.

b- Dresser le tableau de variations de f.

3) a- Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une racine unique α.

b- vérifier que $0{,}6 < \alpha < 0{,}7$.

4) Soit $A\left(1;\dfrac{1}{e}\right)$. *Vérifier que A appartient à (C), et montrer que la tangente (T) en A à (C)*

est parallèle à (d).

5) Tracer (d), (T) et (C).

6) Calculer, en cm^2, *l'aire* $S(\alpha)$ *du domaine limité par la courbe (C), la droite (d)*

et les droites d'équations x = 0 et x = α, *et montrer que* $S(\alpha) = \alpha + 1 - \dfrac{1}{\alpha}$

7) On désigne par f^{-1} *la fonction réciproque de f dans* $\mathbb{R}$.

Indiquer le domaine de définition de f^{-1} *et résoudre l'inéquation* $f^{-1}(x) > 1$.