Construindo uma EDO a partir das suas soluções

Ricardo Misturini, Susana Frómeta Fernández

Sejam f e g funções contínuas em algum intervalo I. Consideremos a EDO linear de segunda ordem

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0. \tag{1}$$

Sabemos que a solução geral é dada por

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \tag{2}$$

onde y_1 e y_2 são quaisquer duas soluções linearmente independentes. Além disso, nesse caso, o Wronskiano, definido por

$$W(y_1, y_2)(x) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix},$$

é tal que $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Agora vamos considerar o problema de achar a EDO a partir das soluções. Isto é, dadas duas funções y_1 e y_2 tentar achar f e g de modo que a equação (1) tenha y_1 e y_2 como soluções. As funções f e g devem satisfazer o sistema linear

$$\begin{cases} y_1''(x) + f(x)y_1'(x) + g(x)y_1(x) = 0 \\ y_2''(x) + f(x)y_2'(x) + g(x)y_2(x) = 0 \end{cases}, \tag{3}$$

que matricialmente pode ser expresso como

$$\begin{bmatrix} y_1'(x) & y_1(x) \\ y_2'(x) & y_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1''(x) \\ -y_2''(x) \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Se $\det \begin{bmatrix} y_1'(x) & y_1(x) \\ y_2'(x) & y_2(x) \end{bmatrix} = -W(y_1, y_2)(x) \neq 0$, o sistema (4) tem solução única que é dada por

$$f(x) = \frac{1}{-W(y_1, y_2)(x)} \det \begin{bmatrix} -y_1''(x) & y_1(x) \\ -y_2''(x) & y_2(x) \end{bmatrix} = -\frac{[W(y_1, y_2)]'(x)}{W(y_1, y_2)(x)}$$

$$g(x) = \frac{1}{-W(y_1, y_2)(x)} \det \begin{bmatrix} y_1'(x) & -y_1''(x) \\ y_2'(x) & -y_2''(x) \end{bmatrix} = \frac{W(y_1', y_2')(x)}{W(y_1, y_2)(x)}$$

Conclusão

Teorema. *Suponha que y_1 e y_2 sejam funções duas vezes diferenciáveis em um intervalo I e que $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Então, y_1 e y_2 são ambas soluções da EDO*

$$y'' - \frac{[W(y_1, y_2)]'}{W(y_1, y_2)} y' + \frac{W(y_1', y_2')}{W(y_1, y_2)} y = 0.$$

Aplicativo Gerador de EDOs.