Ecuaciones de segundo grado

11 de noviembre

2009

Ecuaciones de segundo grado con una incógnita método de solución, formula general e incompletas

Algebra

Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Las ecuaciones de segundo grado o cuadráticas son aquellas en las que la variable está elevada al cuadrado, el siguiente es un ejemplo de una ecuación cuadrática:

$$2x^2 + 5x + 10 = 15x - 2$$

La ecuación solo tiene una incógnita, y ésta se encuentra elevada a la 1 y al cuadrado, además hay términos independientes (números). Las ecuaciones de segundo grado **tienen dos soluciones o ninguna**. Este es un ejemplo de una ecuación cuadrática **completa**, ya que posee coeficientes distintos de cero en los términos cuadráticos (x^2), lineales (x^1) e independientes (x^0).

Veamos entonces algunos ejemplos de ecuaciones cuadráticas incompletas:

$$4x^2 + 10 = 26$$

Esta ecuación es muy fácil de resolver, ya que no se encuentra presente el término lineal:

$$4x^2 + 10 = 26 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{4}$$

Pero las ecuaciones cuadráticas tienen siempre dos soluciones, o bien ninguna, así que en este caso una raíz cuadrada genera dos soluciones, una con signo positivo y otra negativo:

$$\sqrt{4} = 2$$
$$\sqrt{4} = -2$$

Y esto es cierto ya que tanto 2 como -2 elevados al cuadrado dan 4, así que siempre que calculemos la solución de una raíz cuadrada se debe tener en cuenta que ésta genera dos signos. Esto suele expresarse de la siguiente manera:

$$\sqrt{4} = \pm 2$$

Esto es un poco confuso pero en realidad nos dice que hay dos soluciones, vemos que ambas soluciones verifican la ecuación inicial. Veamos ahora otro caso, si la ecuación tiene términos cuadráticos y lineales, pero no tiene términos independientes:

$$x^2 + 4x = 0$$

En este caso sacamos factor común X y razonamos de la siguiente forma:

$$x^2 + 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x+4) = 0$$

Para que el primer miembro se haga 0 solo hay 2 alternativas: x es igual a 0 o (x+4) es igual a 0. De aquí se obtienen las dos soluciones (que llamamos X1 y X2):

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = -4$$

Vemos que las soluciones verifican. Finalmente vamos al caso más complejo que es el que teníamos inicialmente:

$$2x^2 + 5x + 10 = 15x - 2$$

Es muy difícil despejar x de esta ecuación (pero no imposible como veremos más adelante). Para resolverla se utiliza una fórmula muy famosa, la fórmula de las soluciones de la ecuación de segundo grado, la cual es atribuída a un indú de apellido Baskara, en primer lugar hay que pasar todos los términos a un lado de la expresión de manera que quede igualada a cero. En segundo lugar se identifican tres coeficientes llamados a, b y c (a=coeficiente cuadrático, b=coeficiente linearl, c=término independiente).

La ecuación debe expresarse de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Por lo tanto operamos con la ecuación hasta llevarla a este formato (a, b y c son números en definitiva).

$$2x^2 + 5x + 10 = 15x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 10x + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + bx + c = 0$$

Comparando encontramos que:

$$a = 2$$
$$b = -10$$
$$c = 12$$

La fórmula que da las soluciones es la siguiente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Fórmula de Baskara

Así que reemplazando los valores a, b y c:

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2} = \frac{10 \pm 2}{4}$$

Con lo cual obtenemos 2 soluciones, (ambas verifican la ecuación), una con el signo + y otra con el -

$$x_1 = 3$$
$$x_2 = 2$$

Puede darse el caso que la ecuación no tenga solución (cuando queda una raíz negativa).

El tema es: de dónde sacó Baskara esta fórmula?, bueno, en realidad es sencillo, él encontró la forma de construir un trinomio cuadrado perfecto (tercer caso de factoreo), aplicando algunos "truquillos".

Fórmula de Baskara - Demostración

Ahora viene la parte divertida, la demostración. En primer lugar hay que llevar la ecuación a la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Luego se multiplica todo por 4a (la igualdad se mantiene desde luego):

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Ahora sumamos y restamos b^2, de esta manera no cambia nada tampoco:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0$$

Ahora observemos los primeros 3 términos, se trata de un trinomio cuadrado perfecto, así que factoreando se obtiene:

$$(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0$$

Y ahora es fácil despejar X:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \quad \Leftrightarrow \quad 2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Pero como vimos antes una raíz arroja 2 resultados, uno positivo y uno negativo así que queda:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta última es la famosa fórmula que nos da las soluciones para X.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCOGNITA

Definición.

Llamadas también ecuaciones CUADRÁTICAS son aquellas ecuaciones que presentan la siguiente forma general:

$$\boxed{a x^2 + b x + c = 0} \quad ......(1) \quad ; \ \forall a \neq 0 \ \ y \ \ a, b, c \subset R$$

donde a , b y c son llamados coeficientes y que pueden ser reales o complejos [1]
El coeficiente "a" se llama coeficiente cuadrático o de segundo grado.
El coeficiente "b" se llama coeficiente lineal o de primer grado y
El coeficiente "c" se llama término lineal.
Si los coeficientes a, b y c son diferentes de cero,la ecuación de segundo grado se llama completa y si b ó c o ambos, son ceros, la ecuación de segundo grado se llama incompleta.
Así dado: a , b y c ≠ 0 entonces : $ax^2 + bx + c = 0$ se llama ecuación de segundo grado completa.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Si } b=0 & \text{entonces : } a x^2 + c = 0 \\ \text{Si } c=0 & \text{entonces : } a x^2 + b x = 0 \\ \text{Si } b=c=0 & \text{entonces : } a x^2 = 0 \end{array}\right\} \text{se llaman ecuaciones de segundo grado incompletas}$$

Toda ecuación de segundo grado presenta dos raíces o soluciones ,llamémoslas, x_1 y x_2
Estas raíces se pueden obtener mediante dos métodos:

a) Método de la fórmula general :

De la ecuación $a x^2 + b x + c = 0$ se deduce la formulación clásica que despeja la variable :

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

siendo:

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad ......(2)$$

$$\boxed{x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad .....(3)$$

Se define la cantidad subradical : $b^2 - 4ac$ como el discriminante (invariante Característico) de la ecuación cuadrática y se le denota por :"Δ", luego:

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac} \quad .....(4)$$

b) Método de factorización :

Consiste en factorizar el polinomio de segundo grado : $ax^2 + bx + c = 0$ siempre y cuando se pueda.

Los pasos de este método son los siguientes:

* se trasladan todos los términos a un sólo miembro dejando el otro miembro igual a cero.
* Se factoriza este miembro por el método del aspa simple.
* Para obtener las raíces de la ecuación , se iguala cada factor a cero.

Discusión de las raíces de una ecuación de segundo grado ._

Las raíces x_1 y x_2 de una ecuación de segundo grado : $ax^2 + bx + c = 0$, $\forall\ a\neq 0$ dependen de la discriminante Δ dado por (4) así:

Primer caso:

Si $\Delta > 0$ entonces las raíces x_1 y x_2 son reales y desiguales.

Ahora bien en este caso se presentan dos situaciones:

a) si Δ es un cuadrado perfecto las raíces x_1 y x_2 son racionales.

b) si Δ no es un cuadrado perfecto las raíces x_1 y x_2 son irracionales conjugadas.

Segundo caso:

Si $\Delta = 0$ entonces las raíces x_1 y x_2 son reales e iguales (raíces dobles) donde:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \qquad \text{....(5)}$$

Tercer caso:

Si $\Delta < 0$ entonces las raíces x_1 y x_2 son complejos y conjugados.

Propiedades de las raíces de una ecuación de segundo grado ._

Sea la ecuación de segundo grado : $ax^2 + bx + c = 0$, $a\neq 0$ y sus raíces x_1 y x_2 tendremos Las siguientes propiedades:

a) Suma de raíces :

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \qquad \text{.....(6)}$$

b) Producto de raíces :

$$\boxed{x_1 . x_2 = \frac{c}{a}} \qquad \text{.....(7)}$$

c) Diferencia de raíces :

$$\boxed{\left|x_1 - x_2\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}} \qquad \text{.....(8)}$$

d) Suma de cuadrados de las raíces:

$$\boxed{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}} \qquad \text{.....(9)}$$

e) Identidad de Legendre aplicada a las raíces :

$$\boxed{(x_1+x_2)^2-(x_1-x_2)^2=4x_1.x_2} \qquad \text{....(10)}$$

Construcción de una ecuación de segundo grado conociendo sus raíces ._

Conociendo las dos raíces x_1 y x_2 de una ecuación de segundo grado ,esta se construye empleando la suma y el producto de dichas raíces.
Luego la ecuación que dió origen a x_1 y x_2 es :

$$\boxed{x^2-(x_1+x_2)x+(x_1.x_2)=0} \qquad \text{.....(11)}$$

llamada también : forma canónica de la ecuación de segundo grado.
O bien :

$$x^2-Sx+P=0$$

siendo : $S=x_1+x_2$ y
$P=x_1.x_2$

Propiedades adicionales de las raíces ._

* La ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$, $\forall$ $a\neq0$ tiene raíces simétricas (raíces de igual valor pero de signo contrario) si y solo si :

$$x_1=-x_2 \text{ de allí que : } x_1+x_2=0 \text{ entonces } \boxed{b=0} \qquad \text{.....(12)}$$

* La ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$, $\forall$ $a\neq0$ tiene raíces recíprocas (una de las raíces es la inversa de la otra) si y solo si:

$$x_1=\frac{1}{x_2} \text{ de allí que : } x_1.x_2=1 \text{ entonces } \boxed{a=c} \qquad \text{.....(13)}$$

Raíz nula ._

Dada la ecuación de segundo grado : $ax^2 + bx + c = 0$, $\forall$ $a\neq0$,si esta presenta una raíz nula (x=0) entonces :

$$c=0 \qquad \text{.....(14)}$$

Raíz Unidad ._

Dada la ecuación de segundo grado : $ax^2 + bx + c = 0$, $\forall$ $a\neq0$,si esta presenta una raíz unidad (x=1) entonces :

$$a+b+c=0 \qquad \text{.....(15)}$$

Teorema de las ecuaciones cuadráticas equivalentes ._

Sean las ecuaciones cuadráticas (o de segundo grado) :

$$ax^2+bx+c=0 \ ; \ \forall a\neq0$$

y

$$mx^2+nx+p=0 \ ; \ \forall m\neq0$$

Si estas ecuaciones tienen las mismas raíces se dice que dichas ecuaciones son EQUIVALENTES y se cumple que :

$$\boxed{\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}} \quad ......(16) \quad ; \; m,\, n \; y \; p \neq 0$$

Es decir que los coeficientes de cada término semejante son proporcionales entre si.

Teorema de la raíz común ._

Sean las siguientes ecuaciones cuadráticas :

$$a x^2 + b x + c = 0 \;\; ; \; \forall a \neq 0$$
$$m x^2 + n x + p = 0 ; \; \forall m \neq 0$$

Admiten una raíz común, luego se cumplirá la siguiente relación :

$$\boxed{(a.n - m.b)(b.p - n.c) = (a.p - m.c)^2} \quad .....(17)$$

EJERCICIOS

PREGUNTAS

01) $x^2 = 81$

02) $14x^2 - 28 = 0$

03) $(x + 6)(x - 6) = 13$

04) $(2x - 5)(2x + 5) - 119 = 0$

05) $(x + 11)(x - 11) = 23$

06) $\mathbf{x^2 = 7x}$

07) $21x^2 + 100 = - 5$

08) $2x^2 - 6x = 6x^2 - 8x$

09) $(x - 3)^2 - (2x + 5)^2 = - 16$

10) $(4x - 1)(2x + 3) = (x + 3)(x - 1)$

11) $x^2 + 12x + 35 = 0$

12) $x^2 - 3x + 2 = 0$

13) $x^2 + 4x =285$

14) $5x(x - 1) - 2(2x^2 - 7x) = - 8$

15) $(x + 2)^2 = 1 - x(x + 3)$

16) $\frac{2x}{3} + \frac{3}{2x} = \frac{13}{6}$

17) $\frac{x+4}{x+5} - \frac{x+2}{x+3} = \frac{1}{24}$

18) $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} = 2$

19) $\frac{x}{6} + \frac{x^2}{2} = \frac{2x}{3}$

20) $\frac{5x-8}{x-1} = \frac{7x-4}{x+2}$

RESPUESTAS

01) $\{-9, +9\}$

02) $\{\pm\sqrt{2}\}$

03) $\{-7, +7\}$

04) $\{-6, +6\}$

05) $\{-12, +12\}$

06) $\{0, 7\}$

07) $\{0, 5\}$

08) $\{0, 0.5\}$

09) $\{0, -8\frac{2}{3}\}$

10) $\{0, -1\frac{1}{7}\}$

11) $\{-5, -7\}$

12) $\{1, 2\}$

13) $\{15, -19\}$

14) $\{-1, -8\}$

15) $\{-3, -0.5\}$

16) $\{2.25, 1\}$

17) $\{3, -11\}$

18) $\{-4, 2\}$

19) $\{0, 1\}$

20) $\{4, 2.5\}$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La incógnita es x los coeficientes a, b, c.

Sea por ejemplo: $x^2 - 5x + 6 = 0$, aplicando la fórmula general.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Procedimiento para resolución de la ecuación

1) Hallar el valor de los coeficientes.

$a = 1$ $\qquad$ $b = -5$ $\qquad$ $c = 6$

2) Remplazar el valor de los coeficientes en la fórmula general.

3) Efectuamos reducción de términos semejantes en cada miembro.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -5 \quad c = 6$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(6)}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{5 - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Luego $x^2 - 5x + 6 = 0$ Su Conjunto Solución { 3 , 2}

$$6x^2 + 7x - 20 = 0$$

$a = 6 \quad b = 7 \quad c = -20$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(7) \pm \sqrt{(7)^2 - 4(6)(-20)}}{2(6)}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24(-20)}}{12}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 480}}{12}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{529}}{12}$$

$$x = \frac{-7 \pm 23}{12}$$

$$x_1 = \frac{-7 + 23}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$x_2 = \frac{-7 - 23}{12} = \frac{-30}{12} = \frac{-5}{2}$$

Luego $6x^2 + 7x - 20$ Su Conjunto Solución { $\frac{4}{3}$, $\frac{-5}{2}$ }

ECUACIONES INCOMPLETAS DE LA FORMA $ax^2 + bx = 0$

$$x = 0 \; ; \quad x = -\frac{b}{a}$$

Procedimiento para resolución de una ecuación

1) .Se identifica los coeficientes a y b

2) Se remplaza en la fórmula y se efectua las operaciones indicadas

Obs

$$x^2 - 36x = 0$$

$a = 1 \quad b = -36$

$$x = 0 \quad x = -\frac{b}{a}$$

$$x = -\frac{(-36)}{1}$$

$$x = \frac{36}{1}$$

$$x = 36$$

Luego $x^2 - 36x = 0$ Su Conjunto Solución { 0, 6 }

$8x^2 = -64x$

$8x^2 + 64x = 0$

$a = 8 \quad b = 64$

$x = 0 \quad x = -\frac{b}{a}$

$x = -\frac{(64)}{8}$

$x = -\frac{64}{8}$

$x = -8$

ECUACIONES INCOMPLETAS DE LA FORMA $ax^2 + c = 0$

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Procedimiento para resolución de una ecuación

1) Se identifica los coeficientes a y c..

2) Se remplaza en la fórmula y se efectua las operaciones indicadas.

$x^2 - 16 = 0$

$a = 1 \quad c = -16$

$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

$x = \pm\sqrt{\frac{-(-16)}{1}}$

$x = \pm\sqrt{\frac{16}{1}}$

$x = \pm\sqrt{16}$

$x = \pm 4$

Luego $x^2 - 16 = 0$ Su Conjunto Solución $\{ -4, +4 \}$

$2x^2 = 50$

$2x^2 - 50 = 0$

$a = 2 \quad c = -50$

$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

$x = \pm\sqrt{\frac{-(-50)}{2}}$

$x = \pm\sqrt{\frac{50}{2}}$

$x = \pm\sqrt{25}$

$x = \pm 5$

Luego $2x^2 = 50$ Su Conjunto Solución { - 5, + 5}

FORMULAS

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$ax^2 + bx = 0$$
$$ax^2 + c = 0$$

Métodos de Resolución

1) Factorización.- Según la regla del aspa simple, se iguala cada factor a cero.

2) Fórmula.- Se sustituye el valor numérico de los coeficientes en la fórmula:

Ecuación Completa	Ecuación Incompleta	Ecuación Incompleta
$ax^2 + bx + c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$ax^2 + c = 0$
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x = 0$; $x = -\frac{b}{a}$	$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$