פיתוח מלא: מציאת משוואת האליפסה

השוואת סכום המרחקים מהמוקדים ל-10:

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2}+\sqrt{(x+4)^2+y^2}=10$$

העברת אחד השורשים לאגף ימין:

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=10-\sqrt{(x+4)^2+y^2}$$

העלאת שני האגפים בריבוע:

$$(x-4)^2+y^2=100-20\sqrt{(x+4)^2+y^2}+(x+4)^2+y^2$$

פתיחת סוגריים:

$$x^2-8x+16+y^2=100-20\sqrt{(x+4)^2+y^2}+x^2+8x+16+y^2$$

צמצום איברים דומים ($x^2, y^2, 16$) משני האגפים:

$$-8x=100-20\sqrt{(x+4)^2+y^2}+8x$$

בידוד השורש (העברת השורש שמאלה ושאר האיברים ימינה):

$$20\sqrt{(x+4)^2+y^2}=100+16x$$

חלוקת המשוואה ב-4 (כדי לעבוד עם מספרים נוחים יותר):

$$5\sqrt{(x+4)^2+y^2}=25+4x$$

העלאה נוספת בריבוע של שני האגפים:

$$25((x+4)^2+y^2)=(25+4x)^2$$

פתיחת סוגריים:

$$25(x^2+8x+16+y^2)=625+200x+16x^2$$

$$25x^2+200x+400+25y^2=625+200x+16x^2$$

צמצום $200x$ משני האגפים וכינוס איברים (x, y לשמאל, מספרים חופשיים לימין):

$$25x^2-16x^2+25y^2=625-400$$

$$9x^2+25y^2=225$$

חלוקת המשוואה ב-225 לקבלת 1 באגף ימין:

$$\frac{9x^2}{225}+\frac{25y^2}{225}=1$$

משוואת האליפסה הקנונית לאחר צמצום השברים:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

זיהוי הפרמטרים ונקודות החיתוך

מתוך משוואת האליפסה הקנונית $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$:

- $a^2=25 \Rightarrow a=5$. נקודות חיתוך עם ציר ה-x: $(5,0),(-5,0)$
- $b^2=9 \Rightarrow b=3$. נקודות חיתוך עם ציר ה-y: $(0,3),(0,-3)$

הקשר בין a, b, c

לקשר בין a, b, c ראו שרטוט.
המרחק של הנקודה $(0,3)$ מהמוקדים: סכום המרחקים הוא 10.
בגלל שמשולש שווה שוקיים, כל אחד מהמרחקים הוא 5.
ואז נוצר משולש ישר זווית בו מתקיים משפט פיתגורס:

$$3^2+4^2=5^2$$

ומכאן נובעת משוואת הקשר באליפסה:

$$b^2+c^2=a^2$$

