Problemas tipo Selectividad con enunciado de Integrales contextualizado y/o con pregunta conceptual

CURSO	TEMA	WWW.DANIPARTAL.NET
2ºBach Mates II	Tema 5: Integrales	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

PROBLEMA 1

[2,5 puntos] Se quiere introducir una zona verde de césped en un parque urbano para hacerlo más agradable. La zona con cesped está delimitada por las gráficas de las funciones $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por $f(x) = 9x - x^2$ y $g(x) = x$, donde x representa la longitud en metros. Si el césped para plantar en esa zona tiene un precio de 12 euros por metro cuadrado, ¿cuál será el coste total del césped para toda la zona verde?

Un dibujo esquemático,

PROBLEMA 2

[2,5 puntos] Un agricultor quiere dividir su parcela en dos partes para cultivar productos distintos. La parcela es la región plana encerrada entre la parábola $y = 3x^2$ y la recta $y = 12$. Si decide dividir dicha parcela en dos partes iguales mediante la recta $y = a$, halla el valor de a.

a) El número

PROBLEMA 3

[2,5 puntos] Dos primos de 32 y 5 años, respectivamente, heredan de sus abuelos una finca delimitada por las funciones $f(x) = x^3 - 3x + 2$ y $g(x) = 9x/4 + 9/2$. La finca tiene dos regiones, la región de la izquierda será para el primo de menor edad, mientras que la región de la derecha será para el primo mayor. Calcula la superficie de finca que corresponde a cada primo, y razona si es proporcional a sus edades.

a) El dominio de la función es toda la recta real, por

PROBLEMA 4

Una partícula parte de reposo y al cabo de t segundos, su velocidad viene dada por la función $v(t) = t(4-t)$ metros/segundo (recuerda que la velocidad es la derivada del espacio respecto al tiempo).

a) **[0,75 puntos]** Esboza la gráfica de la función espacio con respecto al tiempo.

b) **[1,75 puntos]** Calcula el espacio recorrido en los tres primeros segundos.

a) Si la velocidad es la derivada del espacio, la función espacio es la integral de la velocidad.

$$s(t) = \int v(t)dt = \int t(4-t)dt = \int [4t - t^2]dt = 2t^2 - \frac{t^3}{3} + C$$

La constante de integración nos dice que existen infinitas funciones espacios con la misma derivada.

El enunciado dice que la partícula parte del reposo. Es decir, para $t = 0$ su velocidad vale cero. Pero esta condición no nos parta información para poder sacar, de forma única, la fórmula de la función espacio.

Por lo tanto, aunque el enunciado no nos de información, si deseamos dibujar la gráfica de la función espacio necesitamos una condición de contorno para determinar el valor de la constante de integración. Por lo que asumimos, por ejemplo, que la partícula parte desde el origen de coordenadas. Es decir, nuestra hipótesis es:

$$s(0) = 0$$

$$0 - 0 + C = 0 \to C = 0$$

Y la función espacio queda:

$$s(t) = 2t^2 - \frac{t^3}{3}$$

El dominio de esta función es toda la recta real, por ser un polinomio. No tiene asíntotas.

Además, asumimos que la partícula comienza a desplazarse a partir de un tiempo $t = 0$. Por lo que acotamos el dominio al intervalo $[0, \infty)$.

Los cortes con el eje horizontal son:

$$2t^2 - \frac{t^3}{3} = 0 \to \frac{6t^2 - t^3}{3} = 0 \to 6t^2 - t^3 = 0 \to t^2(6-t) = 0 \to t = 0, t = 6$$

La gráfica pasa por $(0,0)$ y por $(6,0)$.

Los puntos críticos anulan la primera derivada. Es decir, anulan la velocidad.

$$v(t) = 0 \to t(4-t) = 0 \to t = 0, t = 4$$

Con estos dos puntos críticos, podemos estudiar el crecimiento de la función:

$$(0,4) \to v(1) > 0 \to s(t)\ estrictamente\ creciente$$

$$(4,\infty) \to v(10) < 0 \to s(t)\ estrictamente\ decreciente$$

En $t = 4$ encontramos un máximo relativo. Su imagen: $s(4) = 2 \cdot 16 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}\ metros$

Aunque el tiempo lo hemos considerado a partir de $t = 0$ la función matemática del espacio permite evaluar en valores negativos de la variable independiente. Por ejemplo:

$$v(-2) < 0 \to s(t)\ estrictamente\ decreciente$$

Podemos concluir que en $t = 0$ encontramos un mínimo relativo. Su imagen: $s(0) = 0\,m$.

Los candidatos a puntos de inflexión requieren anular la segunda derivada del espacio. Es decir, anular la aceleración:

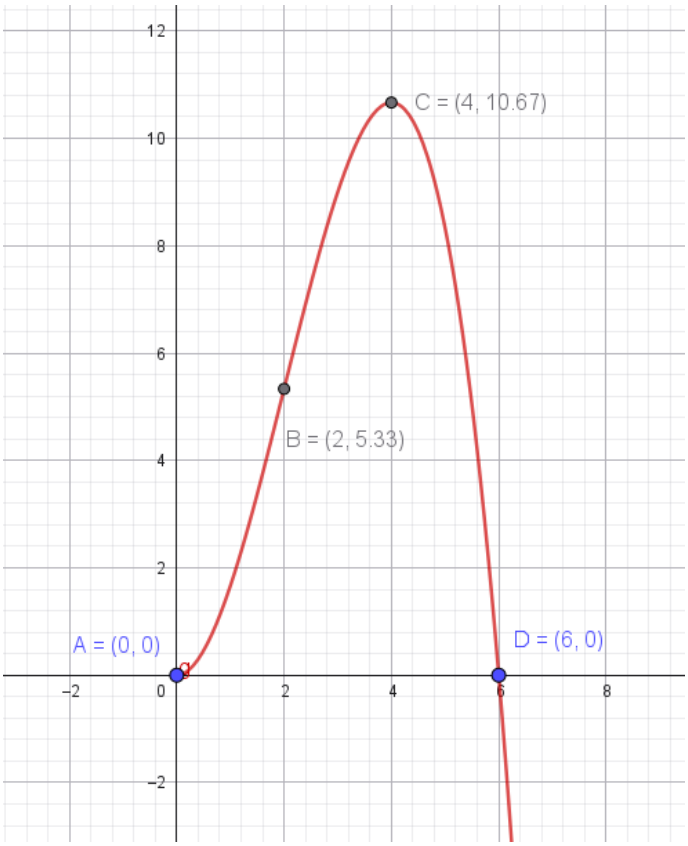
$$a(t) = s''(t) \to a(t) = 4 - 2t \to a(t) = 0 \to 4 - 2t = 0 \to t = 2$$

En los siguientes intervalos miramos el signo de la segunda derivada:

$$(0,2) \to a(1) > 0 \to s(t)\ convexa$$

$(2, \infty) \rightarrow a(10) < 0 \rightarrow s(t)\ cóncava$

En $t = 2$ aparece punto de inflexión, con imagen: $s(2) = 2 \cdot 4 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}\ metros$



b) El espacio recorrido en los primeros tres segundos es:

$$s(3) = 2 \cdot 9 - \frac{27}{3} = 9\ metros$$

PROBLEMA 5

Una población de bacterias tiene inicialmente P_0 bacterias. Sea $P(t)$ el número de bacterias al cabo de t días. Sabiendo que

$$P(t) = P_0 + \int_0^t 290e^{0,1x}\, dx,$$

y que al cabo de 10 días hay 7888 bacterias:

a) **[1,25 puntos]** ¿Cuánto vale P_0, el número inicial de bacterias?

b) **[1,25 puntos]** ¿Cuántas bacterias hay al cabo de 170 días?

(Nota: utiliza como aproximación del número $e \simeq 2,72$).

La función es polinómica.

PROBLEMA 6

[2,5 puntos] Un vivero de plantas verdes suele vender cierto arbusto después de 6 años de crecimiento y cuidado. La velocidad de crecimiento durante esos 6 años es aproximadamente $h'(t) = (1,5)t+5$ cm/año (t tiempo en años), siendo $h(t)$ la altura en cm. Si cada arbusto mide 12 cm cuando se planta y el coste de producción por unidad en euros al cabo de t años es $C(t) = h(t)/10$, calcula el beneficio obtenido si a los 6 años se decide vender 500 arbustos por 15 euros cada uno.

Ambas gráficas tienen

PROBLEMA 7

[2,5 puntos] En una cierta región, un río sigue la forma de la función $f(x) = x^3/4 - x^2 + x$ y es cortado por un camino dirigido según el eje OX. Se quieren plantar pinos en la porción de terreno comprendida entre el río y el camino. Sabiendo que la unidad de medida de longitud es el kilómetro y que la densidad de plantación es 150 pinos por hectárea, calcula el número de pinos necesarios (recuerda que una hectárea son 10000 m^2).

El razonamiento de

PROBLEMA 8

Un cohete de investigación realiza su vuelo con una velocidad representada por la función v, medida en kilómetros por segundo. Tras un estudio se ha determinado que la derivada v' de esta función se corresponde con $v'(t) = 24 - 6\sqrt{t+1}$, donde t representa el tiempo medido en segundos transcurrido desde el lanzamiento. Por otra parte, sabemos que la velocidad inicial es de 15 km/s y que en cuanto empieza a perder velocidad el cohete no se puede controlar. En este momento, lo más conveniente es que se autodestruya y para ello utilizamos un artefacto explosivo que se activa con un temporizador.

a) **[1 punto]** Si utilizamos el temporalizador para que active la explosión, ¿cuál es el valor máximo de tiempo, en segundos, que tomaría como referencia para destruir el cohete?

b) **[1,5 puntos]** Obtén la función que determina la velocidad del cohete y la velocidad máxima que alcanza.

En primer lugar, rompemos

PROBLEMA 9

Un objeto se mueve en línea recta con una velocidad (medida en metros por segundo) definida por la función $v\colon [0,8] \to \mathbb{R}$, dada por $v(t) = \dfrac{8t - t^2}{(t+1)^2}$, donde t representa el tiempo en segundos.

a) **[2 puntos]** Calcula la distancia total (en metros) que recorre el objeto durante los primeros 8 segundos, sabiendo que la distancia es la integral del valor absoluto de la función velocidad.

b) **[0,5 puntos]** Si el objeto se hubiera movido con una velocidad $w\colon [0,8] \to \mathbb{R}$, con $w(t) > v(t)$ para todo $t \in [0,8]$, razona sin calcular la integral, si el objeto hubiera recorrido una distancia mayor o menor en los 8 segundos.

El área de un rectángulo

PROBLEMA 10

a) **[0,5 puntos]** ¿La integral $\int_{-1}^{1} xe^{x^2}dx$ es positiva, negativa o cero? Justifica la respuesta sin calcular la integral.

b) **[2 puntos]** Calcula el área del recinto acotado y limitado por la gráfica de la función $f(x) = xe^{x^2}$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

PROBLEMA 11

Sea la función $f(x) = x^2 e^{-x}$ definida en el intervalo $[0, 3]$.

a) **[1 punto]** Sin efectuar el cálculo de la integral razona, explica y justifica por qué $0 < \int_0^3 x^2 e^{-x}\, dx < 2$.

b) **[1,5 puntos]** Calcula el valor exacto de $\int_0^3 x^2 e^{-x}\, dx$.

PROBLEMA 12

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{\frac{x}{a}} + 2$, donde $a > 0$ es un parámetro. Responde a las siguientes cuestiones:

a) **[1,25 puntos]** Determina el valor de a para que exista una primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pase por los puntos (0,0) y $(a, e + 1)$. Calcula dicha primitiva.

b) **[0,5 puntos]** Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, justifica si es posible o no que la función $G(x) = F(x) + x^2$ también lo sea.

c) **[0,75 puntos]** Calcula a para que $\int_0^a f(x)\, dx = e$.