TRIGONOMETRIA II

RAONS DELS ANGLES SUMA I DIFERÈNCIA

- **Raons trigonomètriques de l'angle suma**

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Exemple 1

Calcula, sense emprar la calculadora, el sinus, el cosinus i la tangent de 75º.

$$\sin(75^\circ)=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin(45^\circ)\cos(30^\circ)+\sin(30^\circ)\cos(45^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(75^\circ)=\cos(45^\circ+30^\circ)=\cos(45^\circ)\cos(30^\circ)-\sin(45^\circ)\sin(30^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan(75^\circ)=\tan(45^\circ+30^\circ)=\frac{\tan(45^\circ)+\tan(30^\circ)}{1-\tan(45^\circ)\tan(30^\circ)}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{12+6\sqrt{3}}{6}=2+\sqrt{3}$$

- **Raons trigonomètriques de l'angle diferència**

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\beta)\cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Exemple 2

Calcula, sense emprar la calculadora, el sinus, el cosinus i la tangent de 15º.

$$\sin(15^\circ)=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin(45^\circ)\cos(30^\circ)-\sin(30^\circ)\cos(45^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(15^\circ)=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos(45^\circ)\cos(30^\circ)+\sin(45^\circ)\sin(30^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan(15^\circ)=\tan(45^\circ-30^\circ)=\frac{\tan(45^\circ)-\tan(30^\circ)}{1+\tan(45^\circ)\tan(30^\circ)}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{12-6\sqrt{3}}{6}=2-\sqrt{3}$$

TRIGONOMETRIA II

- **Raons trigonomètriques dels angles doble i meitat**

$$\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \qquad \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$$

$$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha) \qquad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$$

$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)} \qquad \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}}$$

Exemple 3

Calcula el valor de sin(40º) i cos(40º), sabent que sin(20º)=0,34.

Per la identitat trigonomètrica fonamental, i sabent que 20º és un angle del primer quadrant,

$$\cos(20^\circ)=+\sqrt{1-\sin^2(20^\circ)}=+\sqrt{1-0{,}34^2}\simeq 0{,}94$$

$$\sin(40^\circ)=\sin(2\cdot 20^\circ)=2\sin(20^\circ)\cos(20^\circ)\simeq 2\cdot 0{,}34\cdot 0{,}94\simeq 0{,}64$$

$$\cos(40^\circ)=\cos(2\cdot 20^\circ)=\cos^2(20^\circ)-\sin^2(20^\circ)\simeq 0{,}94^2-0{,}34^2\simeq 0{,}77$$

Exemple 4

Calcula el valor de sin(25º) i cos(25º), sabent que sin(50º)=0,77.

Per la identitat trigonomètrica fonamental, i sabent que 50º és un angle del primer quadrant,

$$\cos(50^\circ)=+\sqrt{1-\sin^2(20^\circ)}=+\sqrt{1-0{,}77^2}\simeq 0{,}64$$

Per ser 25º del primer quadrant,

$$\sin(25^\circ)=\sin\left(\frac{50^\circ}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1-\cos(50^\circ)}{2}}\simeq+\sqrt{\frac{1-0{,}64}{2}}\simeq+0{,}42$$

$$\cos(25^\circ)=\cos\left(\frac{50^\circ}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1+\cos(50^\circ)}{2}}\simeq+\sqrt{\frac{1+0{,}64}{2}}\simeq+0{,}91$$

- **Transformacions de sumes en multiplicacions**

$$\sin(a)+\sin(b)=2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad \sin(a)-\sin(b)=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos(a)+\cos(b)=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad \cos(a)-\cos(b)=-2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Exemple 5

Transforma en multiplicació i calcula sin(75º)+sin(15º)

$$\sin(75^\circ)+\sin(15^\circ)=2\sin\left(\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{75^\circ-15^\circ}{2}\right)=2\sin(45^\circ)\cdot\cos(30^\circ)=2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

TRIGONOMETRIA II

IGUALTATS TRIGONOMÈTRIQUES.

- **Identitats trigonomètriques**

Una identitat trigonomètrica és una igualtat que es verifica per a qualsevol valor dels angles que hi apareixen.

Exemples: 1) $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$ 2) $\tan(\beta)=\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}$ 3) $1+\sec^2(\alpha)=\tan^2(\alpha)$

L'objectiu, en els exercicis, serà **demostrar**-les.

Exemple 6

Demostra la igualtat següent: $\text{cotan}(\alpha)\cdot\sec(\alpha)=\text{cosec}(\alpha)$

$$\text{cotan}(\alpha)\cdot\sec(\alpha)=\frac{\cancel{\cos(\alpha)}}{\sin(\alpha)}\cdot\frac{1}{\cancel{\cos(\alpha)}}=\frac{1}{\sin(\alpha)}=\text{cosec}(\alpha)$$

#

Exemple 7

Demostra la igualtat següent: $\sec(\alpha)-\cos(\alpha)=\tan(\alpha)\cdot\sin(\alpha)$

$$\tan(\alpha)\cdot\sin(\alpha)+\cos(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\cdot\sin(\alpha)+\cos(\alpha)=\frac{\sin^2\alpha}{\cos(\alpha)}+\cos(\alpha)=\frac{\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\frac{1}{\cos(\alpha)}=\sec(\alpha).$$

Per tant, $\tan(\alpha)\cdot\sin(\alpha)=\sec(\alpha)-\cos(\alpha)$

#

- **Equacions trigonomètriques**

Una equació trigonomètrica és una igualtat que es compleix per a uns determinats valors dels angles que hi apareixen.

L'objectiu, en els exercicis, serà **resoldre**-les; és a dir, determinar per a quins valors de les incògnites es verifica la igualtat.

No hi ha un mètode general per a resoldre una equació trigonomètrica. Amb tot, et pot ser útil seguir els següents passos:

1. Si hi ha raons trigonomètriques de diferents angles, x, 2x, x+π..., les expressarem totes en funció de les raons trigonomètriques del mateix angle, generalment, x.
2. Si hi ha diverses raons trigonomètriques, sin(x), cos(x), tan(x)..., les expressarem totes en funció d'una de les raons.
3. Resoldrem l'equació obtinguda considerant com a incògnita la raó trigonomètrica triada en el pas anterior.
4. Buscarem l'angle x a partir de la seva raó trigonomètrica, tenint en compte que, si l'angle x és una solució, també ho seran els angles $x+360^\circ k$, amb $k\in\mathbb{Z}$.

TRIGONOMETRIA II

Exemple 8

Resol l'equació $\cos(3x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Els angles del primer gir que tindran per cosinus $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ són 135º i 225º.

D'altra banda, els angles obtinguts en sumar als anteriors una quantitat entera de voltes tindran el mateix cosinus.

Per tant, $\begin{cases} 3x=135^\circ+360^\circ k;\ k\in\mathbb{Z} \\ 3x=225^\circ+360^\circ k;\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$.

Aïllant la x obtenim totes les solucions, $\boxed{\begin{cases} x=45^\circ+120^\circ k;\ k\in\mathbb{Z} \\ x=75^\circ+120^\circ k;\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}}$

Exemple 9

Resol l'equació $\sin(x)=\sin(2x)$.

$$\sin(x)=2\sin(x)\cdot\cos(x) \Rightarrow \sin(x)-2\sin(x)\cdot\cos(x)=0 \Rightarrow \sin(x)\left[1-2\cos(x)\right]=0 \Rightarrow \begin{cases} \sin(x)=0 \\ 1-2\cos(x)=0 \end{cases}$$

$$\sin(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0^\circ+360^\circ k;\ k\in\mathbb{Z} \\ x=180^\circ+360^\circ k;\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=0^\circ+180^\circ k;\ k\in\mathbb{Z}}$$

$$1-2\cos(x)=0 \Rightarrow \cos(x)=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=60^\circ+360^\circ k;\ k\in\mathbb{Z} \\ x=300^\circ+360^\circ k;\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}}$$

Exemple 10

Resol l'equació $\sin(x)+\sin(3x)=0$.

$$\sin(x)+\sin(3x)=2\sin\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right)=2\sin(2x)\cdot\cos(-x)=2\sin(2x)\cdot\cos(x)=0$$

Per tant,

$$\sin(2x)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x=0^\circ+360^\circ k;\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow x=0^\circ+180^\circ k;\ k\in\mathbb{Z} \\ 2x=180^\circ+360^\circ k;\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow x=90^\circ+180^\circ k;\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=0^\circ+90^\circ k;\ k\in\mathbb{Z}}$$

$$\cos(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=90^\circ+360^\circ k;\ k\in\mathbb{Z} \\ x=270^\circ+360^\circ k;\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

ja havíem contemplat aquestes solucions

Exemple 11

Resol l'equació $\cos(2x)=1+\sin(x)$.

$$\cos^2(x)-\sin^2(x)=1+\sin(x) \Rightarrow 1-\sin^2(x)-\sin^2(x)=1+\sin(x) \Rightarrow 2\sin^2(x)+\sin(x)=0$$

$$\sin(x)\left[2\sin(x)+1\right]=0 \Rightarrow \begin{cases} \sin(x)=0 \Rightarrow \boxed{x=0^\circ+180^\circ k;\ k\in\mathbb{Z}} \\ 2\sin(x)+1=0 \Rightarrow \sin(x)=-\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=210^\circ+360^\circ k;\ k\in\mathbb{Z} \\ x=330^\circ+360^\circ k;\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}} \end{cases}$$