

直式加減題的探究設計

楊麗琮、關樹培

香港教育學院

直式加減屬初小的數學課題，本文簡述我們設計一系列探究活動，於一至兩節數學課內施行的過程。

從常見的思考題作起點

翻閱教本，下面兩道是最貼近我們思路的挑戰題，也是我們設計的起步點。

$$\begin{array}{r}
 \\
 +) 2 2 \\
 \hline
 6 1 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \\
 +) 7 8 \\
 6 \\
 \hline
 1 7 \\
 \hline
 5 1 5
 \end{array}$$

來源：梁易天、劉應泉《新一代數學》

來源：盧樸川《小學數學》

我們的探究設計

隨后是我們運用開放題及 SOLO 分類法作為擬題原則，配以情境而譜成的兩位減法直式探究題目：

一條書蟲向你提出挑戰，它把一條直式中的數字蛀掉，其中 □ 是被它蛀掉了的數字，請找出 □ 的數字，並填在 □ 內。

$$\begin{array}{r}
 \square \square \\
 -) \square \square \\
 \hline
 \square \square \\
 \hline
 2 \quad 6
 \end{array}$$

此難題可稍作修改，得出多個延伸題，並可以在工作紙內以闖關的形式貫穿，形式如下。

第一關：

你能夠寫出另外四個可能的答案嗎？



$$\begin{array}{r}
 \square \square \\
 -) \square \square \\
 \hline
 \square \square \\
 \hline
 2 \quad 6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \square \square \\
 -) \square \square \\
 \hline
 \square \square \\
 \hline
 2 \quad 6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \square \square \\
 -) \square \square \\
 \hline
 \square \square \\
 \hline
 2 \quad 6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \square \square \\
 -) \square \square \\
 \hline
 \square \square \\
 \hline
 2 \quad 6
 \end{array}$$

這一關讓學生自由組合數字，期望從學生的組合中窺見他們的思維習慣。教師也可以藉此與學生討論兩數尾數的可能性：

差的尾數	兩數尾數的可能性
0	9-9、8-8、7-7、6-6、5-5、4-4、3-3、2-2、1-1、0-0
1	9-8、8-7、7-6、6-5、5-4、4-3、3-2、2-1、1-0、(1)0-9
2	9-7、8-6、7-5、6-4、5-3、4-2、3-1、2-0、(1)1-9、(1)0-8
3	9-6、8-5、7-4、6-3、5-2、4-1、3-0、(1)2-9、(1)1-8、(1)0-7
4	9-5、8-4、7-3、6-2、5-1、4-0、(1)3-9、(1)2-8、(1)1-7、(1)0-6
5	9-4、8-3、7-2、6-1、5-0、(1)4-9、(1)3-8、(1)2-7、(1)1-6、(1)0-5
6	9-3、8-2、7-1、6-0、(1)5-9、(1)4-8、(1)3-7、(1)2-6、(1)1-5、(1)0-4
7	9-2、8-1、7-0、(1)6-9、(1)5-8、(1)4-7、(1)3-6、(1)2-5、(1)1-4、(1)0-3
8	9-1、8-0、(1)7-9、(1)6-8、(1)5-7、(1)4-6、(1)3-5、(1)2-4、(1)1-3、(1)0-2
9	9-0、(1)8-9、(1)7-8、(1)6-7、(1)5-6、(1)4-5、(1)3-4、(1)2-3、(1)1-2、(1)0-1

註：(1)表示經退位後所產生的 10

第二關：

被減數個位的數字是 2，你能夠寫出兩個可能的答案嗎？



$$\begin{array}{r} \square \square \\ -) \square \square \\ \hline 2 \quad 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \square \square \\ -) \square \square \\ \hline 2 \quad 6 \end{array}$$

這一關學生需懂得固定被減數和減數個位的數字分別為 2 和 6，並運用退位原理，改變被減數和減數中十位的數字，從而得出不同的解。

第三關：

被減數和減數十位的數字為一個雙數，一個單數。
你能夠寫出兩個可能的答案嗎？



$$\begin{array}{r} \square \square \\ -) \square \square \\ \hline 2 \quad 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \square \square \\ -) \square \square \\ \hline 2 \quad 6 \end{array}$$

這一關期望學生注意到偶數和奇數的差不可能是偶數，故必須運用退位原理以找出答案。

第四關：

□ 的數字全部是單數，而且它們為不同的數字。
你能夠寫出兩個可能的答案嗎？



$$\begin{array}{r} \square \square \\ -) \square \square \\ \hline 2 \quad 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \square \square \\ -) \square \square \\ \hline 2 \quad 6 \end{array}$$

第四關有別於之前的要求，填入的數字不可以重覆，而且解題時需符合題意的兩個條件。學生要明白這道減數中沒有退位存在，並需篩選合適的數字組合以確保格中所有數字不同。這題的答案只可以是 79-53 或 57-31。

我們的實踐嘗試

完成減法直式探究工作紙的二年級學生共 24 人，以下是該群學生於每關的得分情況。

減法直式數題的探究: $\begin{array}{r} \square \square \\ -) \square \square \\ \hline 2 \quad 6 \end{array}$	答對的學生人數
第一關: 寫出另外四個可能的答案	24
第二關: 被減數個位的數字是 2	8
第三關: 被減數和減數十位的數字為一個雙數，一個單數	5
第四關: □ 的數字全部是單數，而且它們為不同的數字	6

是次直式數題教學只有一位學生能成功通過工作紙裡的所有挑戰。但從學生的解題表現可見他除了試驗法(Trial & Error)外，還懂得研究兩數之差的尾數，並自行嘗試找出兩數尾數的可能組合。他們在探究的過程中，表現出數的排序能力(圖 1)，並懂得運用順數(圖 2&3)、整十數(圖 4)，以固定減法直式十位中的數字或個位中的數字，再分別變動個位中的數字或十位中的數字，從而得出不同的解。

第一關:

你能夠寫出另外四個可能的答案嗎？

$\begin{array}{r} 4 \square \\ -) 2 \square \\ \hline 2 \quad 6 \end{array}$

$\begin{array}{r} 5 \square \\ -) 3 \square \\ \hline 2 \quad 6 \end{array}$


$\begin{array}{r} 6 \square \\ -) 4 \square \\ \hline 2 \quad 6 \end{array}$

$\begin{array}{r} 7 \square \\ -) 4 \square \\ \hline 2 \quad 6 \end{array}$

圖 1

第一關:

你能夠寫出另外四個可能的答案嗎?



Four subtraction problems are shown, each with a red circle around the top two digits of the minuend:

$$\begin{array}{r} 49 \\ - 23 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ - 33 \\ \hline 26 \end{array}$$


$$\begin{array}{r} 69 \\ - 43 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 79 \\ - 53 \\ \hline 26 \end{array}$$

圖 2

第一關:

你能夠寫出另外四個可能的答案嗎?



Four subtraction problems are shown, each with a red circle around the top two digits of the minuend:

$$\begin{array}{r} 33 \\ - \quad 7 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ - \quad 8 \\ \hline 26 \end{array}$$


$$\begin{array}{r} 35 \\ - \quad 9 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 31 \\ - \quad 5 \\ \hline 26 \end{array}$$

圖 3

第一關:

你能夠寫出另外四個可能的答案嗎?



Four subtraction problems are shown, each with a red circle around the top two digits of the minuend:

$$\begin{array}{r} 40 \\ - 14 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50 \\ - 24 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ - 34 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 70 \\ - 44 \\ \hline 26 \end{array}$$

圖 4

這樣的成績當然仍強差人意，但比起我們首次於加法試行時要好得多了。最令人欣慰的是見到學生的進步。

我們的一點心得

反思多個月來的工作，我們總結了一些改善要注意的地方。

- 學生的專注能力(attention span)
二年級學生年紀尚小，不可能長時間高度專注集中於同一數題上。瞭解學生的能力，適當分配時間為探究成效的關鍵。
- 學生之間的差異(individual difference)
在課堂中實踐數學探究會突顯學生間的個別差異，故有需要增設措施舒緩差異對解題教學所構成的壓力。同學可在相同的情況下開展解題活動，但能力稍遜的學生習作需作一定程度的調適，例如於工作紙中每關的題目額外安排一個經調適的問題，以降低其難度。以下是一些樣本舉隅：

$$\begin{array}{r} \square \square \\ -) \square \square \\ \hline 2 \ 6 \end{array}$$

(第二關經輕調適的難題)

$$\begin{array}{r} \square \square \\ -) \square \square \\ \hline 2 \ 6 \end{array}$$

(第二關經重調適的難題)

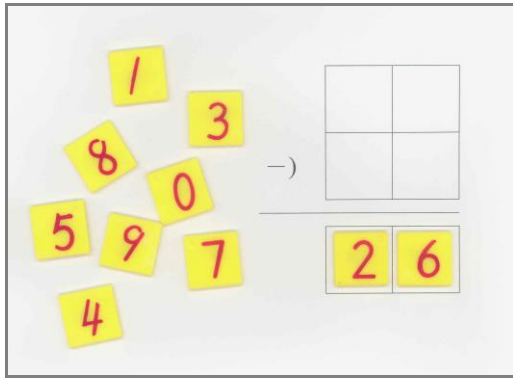
$$\begin{array}{r} 9 \ \square \\ -) 6 \ \square \\ \hline 2 \ 6 \end{array}$$

(第三關經調適的難題)

期望經調適後的解題習作有助減低能力稍遜學生的挫敗感，保持他們對數學的信心和好奇心。

- 實物操作輔助思維

學生們的學習風格(learning style)各異。為學生提供一些 0-9 的數字咭，讓他們能透過實物操作思考問題。以第四關為例，教具能不經意地在學生操作的過程中，提醒他們不能重覆設置某一個數字於方格中，以符合題目的要求。



- 擬題的考慮

究竟一道開放題有多少個解才適合(某一班學生)呢？怎麼擬題才取得預期的效果呢？下面的開放題有三組不同的解嗎？會否有第四、第五組解答？會否與學生作跟進討論？你可以擬訂另一題只有兩組解的數題嗎？

第五關：

被減數和減數十位的數字為一個雙數，一個單數。
 □ 內全部是不同的數字。
 你能夠寫出一些可能的答案嗎？



$$\begin{array}{r} \square \square \\ -) \square \square \\ \hline 6 \ 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \square \square \\ -) \square \square \\ \hline 6 \ 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \square \square \\ -) \square \square \\ \hline 6 \ 3 \end{array}$$

凡此種種建議，有待將來再於教室裡實踐才能作進一步分析了。你有興趣加入我們的探究行列嗎？

參考資料

- G. Polya 著，九章出版社編輯部譯 (2000):《數學發現》，台北，九章出版社。
- S.Krulik & J.A.Rudnick 著，馬秀蘭、吳德邦譯 (2009):《小學數學推理與解題習作簿》，臺北市，心理出版社。
- 馮振業 (2010): 學波利亞教小學生解難和探究，輯於江紹祥、梁志強編《數學教育的探究學習》，香港，香港教育局課程發展處數學組。
- 楊麗琼 (2011):《畢業專題研習 — 應用波利亞的解難思維於小學直式數題教學》，香港，香港教育學院。
- 關樹培 (2001): 淺談應用題和數學解難，輯於《數學教育期刊第三十八期》，香港，香港教育學院。