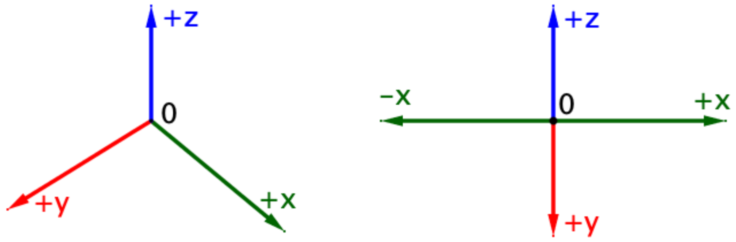
Kapitola 2

Mongeova projekce

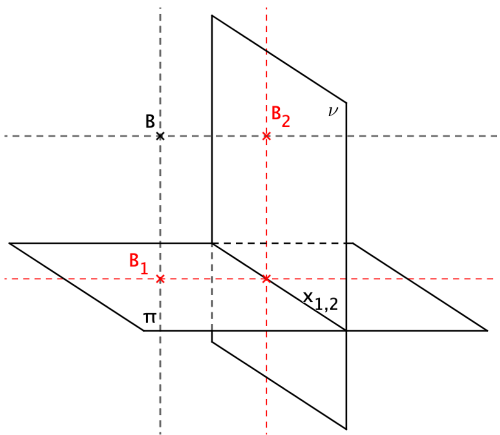
2.1 Zobrazení bodu, přímky, roviny

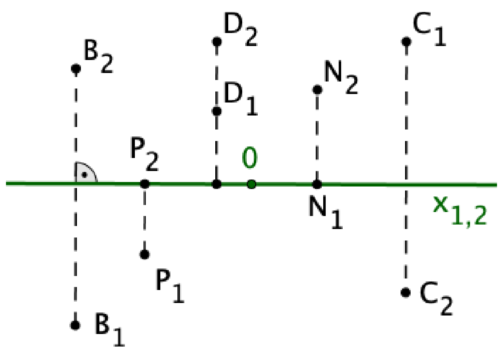
Definice: *Kolmé promítání na dvě vzájemně kolmé průmětny nazýváme Mongeovou projekcí.*
$\pi(xy)$ - **půdorysna**, volíme ji vodorovně, objekty v ní označujeme indexem 1
$\nu(xz)$ - **nárysna**, volíme ji svisle kolmo k π, objekty v ní označujeme indexem 2



Průsečnici π a ν budeme považovat za souřadnou osu x, značí se $x_{1,2}$ a nazývá *základnice.*

Zobrazení bodu



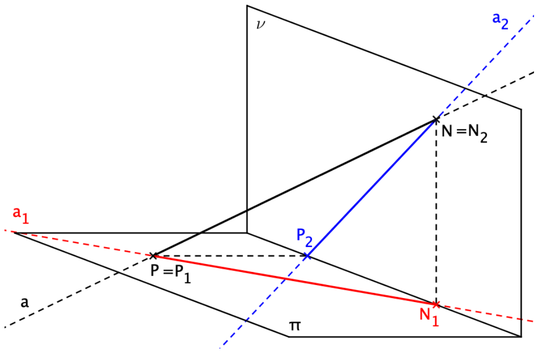


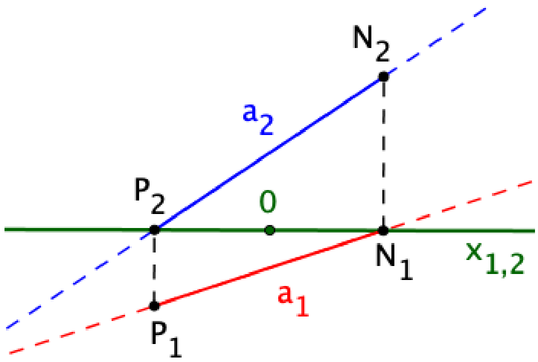
B_1, B_2—nazýváme sdružené průměty bodu B, získáme je kolmým průmětem bodu B do obou průměten
průměty B_1 a B_2 musí ležet na přímce kolmé s souřadné ose $x_{1,2}$, této kolmici (spojnici průmětů), budeme říkat **ordinála**, zkrácený zápis: $B_1 \xrightarrow{ord} B_2$

podle rozmístění průmětů můžeme stanovit polohu bodů vzhledem k průmětnám:
B - leží nad půdorysnou a před nárysnou
C - leží pod půdorysnou a za nárysnou
D - leží nad půdorysnou a za nárysnou
P - leží v půdorysně a před nárysnou
N - leží nad půdorysnou a v nárysně

Zobrazení přímky

Přímka je v MP jednoznačně určena svým půdorysným a nárysným průmětem. např. $a(a_1; a_2)$

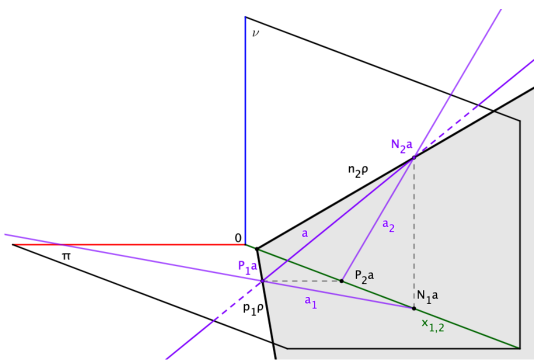


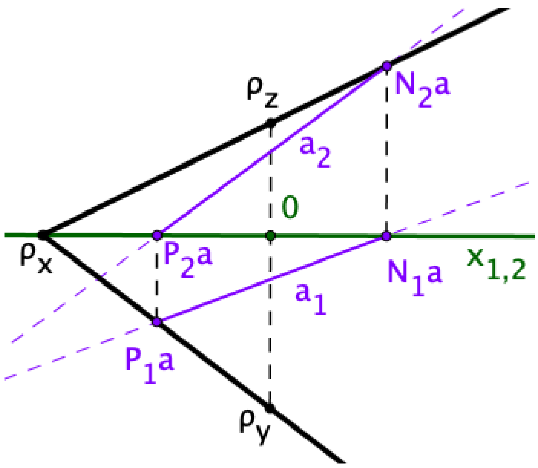


a - přímka v prostoru;
a_1 - kolmý průmět do π *"půdorysný"*;
a_2 - kolmý průmět do ν *"nárysný"*;
P_1 - půdorysný stopník a, $a \cap \pi = P_1$;
P_2 - nárys půdorysného stopníku *průmět* P *do* ν (**vždy** leží na $x_{1,2}$);
N_2 - nárysný stopník a, $a \cap \nu = N_2$;
N_1 - půdorys nárysného stopníku *průmět* N *do* π (**vždy** leží na $x_{1,2}$);

Zobrazení roviny

Rovina je v MP jednoznačně určena svou půdorysnou a nárysnou stopou, např. $\rho(p_1\rho; n_2\rho)$.



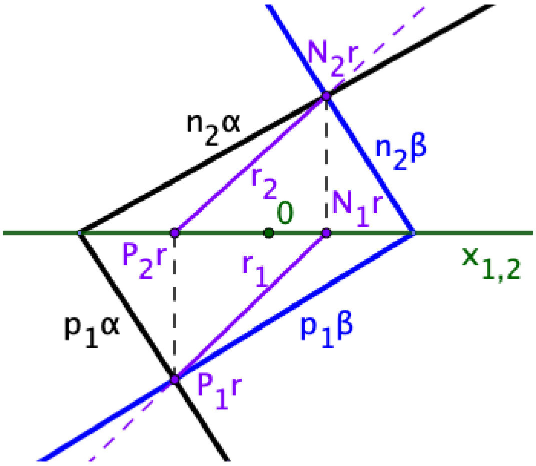


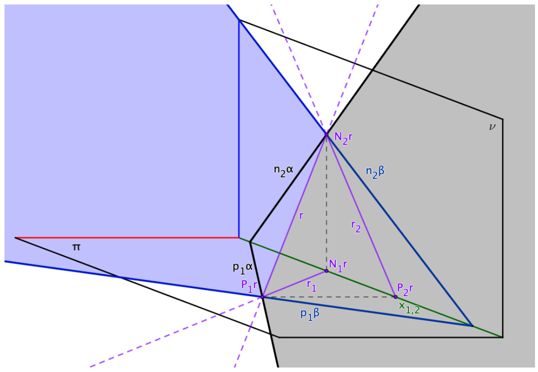
$p_1\rho$ - půdorysná stopa roviny ρ, $p_1\rho \equiv p^\rho = \rho \cap \pi$
$n_2\rho$ - nárysná stopa roviny ρ, $n_2\rho \equiv n^\rho = \rho \cap \nu$
stopy se vždy musí protínat na ose $x_{1,2}$
rovinu můžeme zadat pomocí „souřadnic“ - jedná se o zjednodušený zápis průsečíků roviny s osami souřadného systému:

$$\begin{array}{l} \rho \cap x = \rho_x(x; 0; 0) \\ \rho \cap y = \rho_y(0; y; 0) \\ \rho \cap z = \rho_z(0; 0; z) \end{array} \Longrightarrow \rho \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \Longrightarrow \rho(x; y; z)$$

stopníky přímky, která leží v rovině, leží na příslušných stopách dané roviny
$P_1a \in p_1\rho \wedge N_2a \in n_2\rho$

Průsečnice dvou rovin

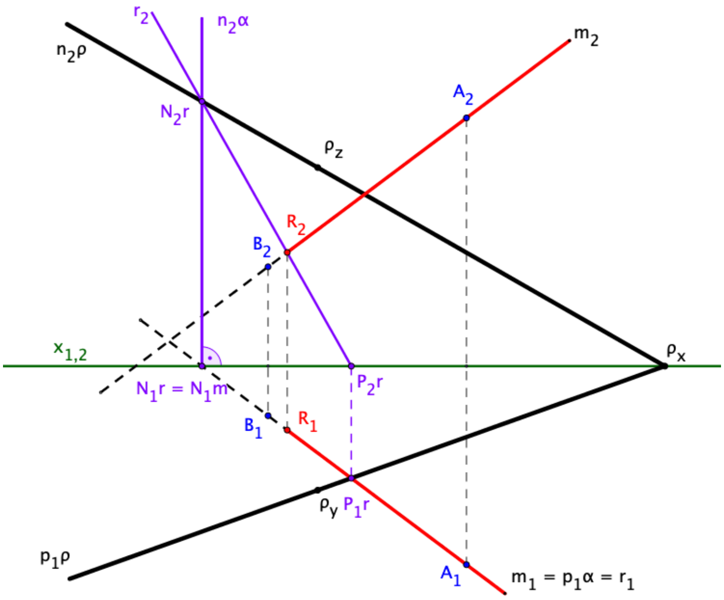




stopníky průsečnice musí být průsečíky odpovídajích si stop daných rovin.

$$r = \alpha \cap \beta : \left\{ \begin{array}{c} P_1r = p_1\alpha \cap p_1\beta \xrightarrow{ord} P_2r \in x_{1,2} \\ N_2r = n_2\alpha \cap n_2\beta \xrightarrow{ord} N_1r \in x_{1,2} \end{array} \right\} \Longrightarrow r : \begin{array}{l} r_1 = P_1rN_1r \\ r_2 = P_2rN_2r \end{array}$$

Průsečík přímky a roviny



1. přímkou proložíme vhodnou rovinu (obvykle kolmou k π nebo ν)
   $m \subset \alpha \perp \pi \Rightarrow p_1\alpha \equiv m_1 \wedge N_1m \in n_2\alpha \perp x_{1,2}$

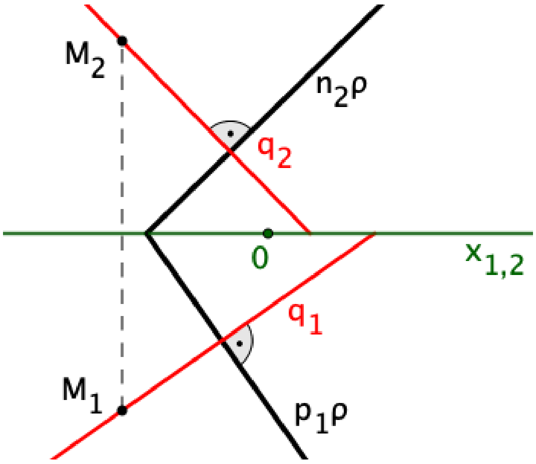
2. sestrojíme průsečnici obou rovin
   $r = \alpha \cap \rho$
   $(p_1\alpha \equiv) m_1 \cap p_1\rho = P_1r \xrightarrow{ord} P_2r \in x_{1,2}$
   $n_2\alpha \cap n_2\rho = N_2r \xrightarrow{ord} N_1r \in x_{1,2}$
   $r : r_1 = P_1rN_1r \equiv m_1, r_2 = P_2rN_2r$

3. najdeme průsečík průsečnice a původní zadané přímky, což je hledaný průsečík přímky a roviny
   $$R = r \cap m : \begin{array}{l} r_1 \equiv m_1 \\ r_2 \cap m_2 \quad = R_2 \xrightarrow{ord} R_1 \in m_1 \end{array}$$

Přímka kolmá k rovině, rovina kolmá k přímce

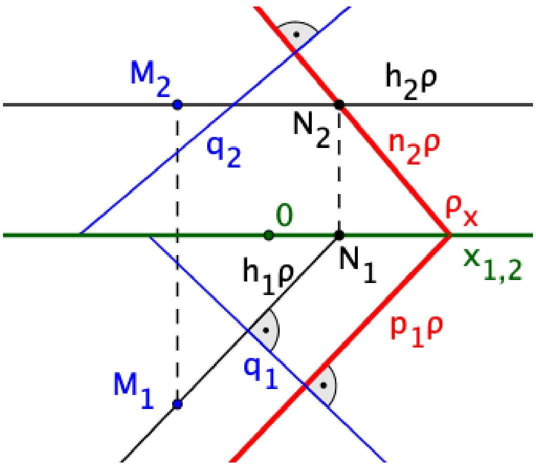
Definice: *Přímka je kolmá k rovině, jestliže je kolmá ke všem přímkám dané roviny.*

Kritérium:[1] *Přímka je kolmá k rovině, jestliže je kolmá alespoň ke dvěma vzájemně různoběžným přímkám dané roviny.*



bodem M vedeme přímku q kolmou k rovině ρ:
průměty přímky, která je kolmá k rovině, jsou kolmé k příslušným stopám dané roviny:

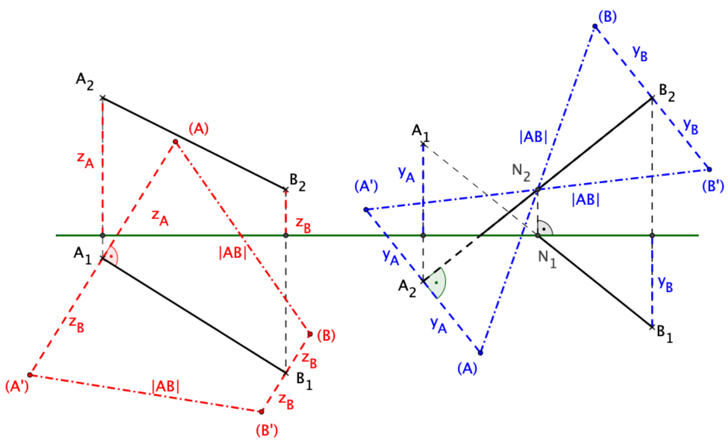
$$M_1 \in q_1 \perp p_1\rho$$
$$M_2 \in q_2 \perp n_2\rho$$



bodem M proložíme rovinu α kolmou k přímce q:

1. bodem M vedeme hlavní přímku $h\rho$ roviny ρ:
   $M_1 \in h_1\rho \perp q_1$; $M_2 \in h_2\rho \parallel x_{1,2}$
2. najdeme nárysný stopník N hlavní přímky $h\rho$:
   $h_1\rho \cap x_{1,2} = N_1 \xrightarrow{ord} N_2 \in h_2\rho$
3. nárysným stopníkem N musí procházet nárysná stopa $n\rho$:
   $N_2 \in n_2\rho \perp q_2$; $n_2\rho \cap x_{1,2} = \rho_x$
   $\rho_x \in p_1\rho \perp q_1$

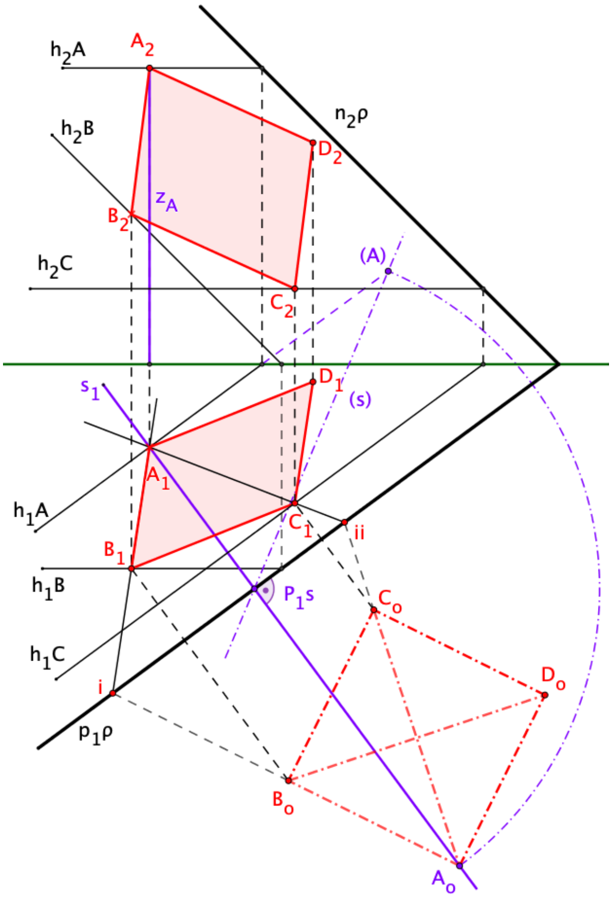
Sklopení přímky



Sklápíme přímku do průmětny, abychom nalezli skutečnou vydálenost dvou různých bodů přímky, odchylku od průmětny případně i stopník.

[1] stanovuje nejjednodušší snadno ověřitelnou situaci, kdy je přímka kolmá k rovině

Otočení roviny



PROČ otáčíme: abychom získali skutečný tvar a rozměry obrazce
CO otáčíme: rovinu
KAM otáčíme: do průmětny
⇒ OSA otáčení: průsečnice otáčené roviny a průmětny, do které otáčíme, neboli stopa otáčené roviny
POLOMĚR otáčení: skutečná vzdálenost libovolného bodu otáčené roviny od osy otáčení

1. otáčíme rovinu ρ do půdorysny π
   $o \equiv p_1\rho = \rho \cap \pi$

2. hledáme poloměr otáčení

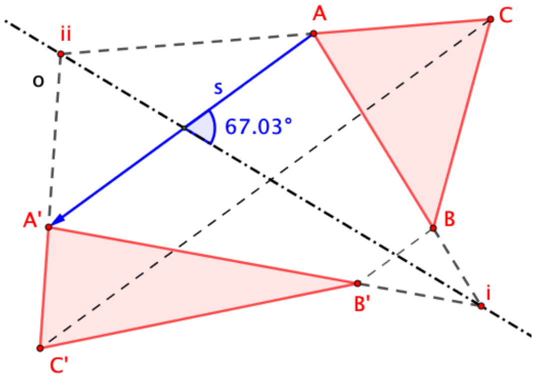
   a) bodem A proložíme spádovou přímku s roviny ρ
   $A_1 \in s_1 \perp p_1\rho$
   $s_1 \cap p_1\rho = P_1 s$ *(střed otáčení bodu A)*

   b) sklopíme s do půdorysny π
   $|A_1(A)| = z_A = v(A_2, x_{1,2}); A_1(A) \perp s_1$
   $P_1 s \equiv (Ps)$
   $r_A = |(A)P_1 s|$

3. bod (A) otočíme kolem bodu $P_1 s$ na spádovou přímku s jako bod A_o
   obvykle volíme A_o v opačné polorovině učené $p_1\rho$ než leží A_1

4. pro odvození dalších bodů využíváme osovou afinitu $\mathcal{A}(p_1\rho, A_1 \longrightarrow A_o)$

Osová afinita



osová afinita je určena osou afinity o a dvojicí odpovídajících si bodů A a A'.
$\mathcal{A}(p_1\rho, A \longrightarrow A')$

V afinitě $\mathcal{A}$ hledáme k bodu B jeho obraz B':
$\mathcal{A} : B \longrightarrow B'$
$AB \cap o = i = A'B' \cap o$
i - *samodružný bod afinity*
$B' \in A'i \wedge B'B \parallel A'A$

$\mathcal{A} : C \longrightarrow C'$
$AC \cap o = ii = A'C' \cap o$
ii - *samodružný bod afinity*
$C' \in A'ii \wedge C'C \parallel A'A$