1 Was ist eine quadratische Funktion / Gleichung

Eine Funktion in deren Funktionsterm ein Quadrat vorkommt heißt **quadratische Funktion**. Sie wird durch den Funktionsterm (7) beschrieben. a, b, c sind dabei sog. Parameter, also einfache Zahlenwerte. Eine Gleichung ist dann quadratisch, wenn sie die Form (8) annimmt.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{1}$$

$$0 = ax^2 + bx + c \tag{2}$$

Beispiel. Für eine Funktion $f(x) = 2x^2 + 4x + 12$ ist $a = 2,\ b = 4,\ c = 12$.

Graph Der Graph einer quadratischen Funktion heißt **Parabel**. Der Graph einer Funktion

$$y = x^2 \tag{3}$$

heißt **Normalparabel** (s. Abb. 1), da sie der Graph der ëinfachsten quadratischen Funktion der Welt ist.

Definition 1. *Der unterste / höchste Punkt bzw. der Punkt an dem sich die Parabel spiegelt heißt **Scheitelpunkt** $S(x_E \mid y)$ mit x_E als **Extremstelle**.* [1]

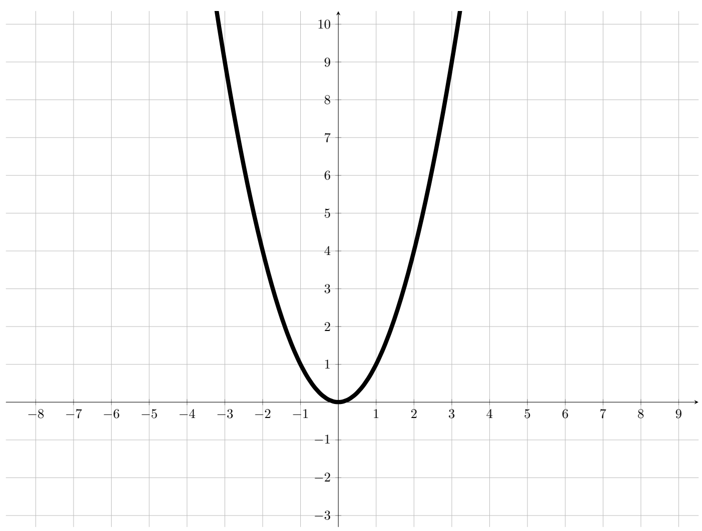

Abbildung 1: Graph einer Normalparbel

[1] In der Infinitesimalrechnung kann man auch sagen: *Der Scheitelpunkt einer Funktion y ist der Punkt, an dem die Ableitung eine Nullstelle besitzt, also der Punkt einer Parabel mit Steigung 0.*

2 Verschiebung von Normalparabeln

2.1 Verschiebung in y-Richtung

Eine lineare Funktion $y = mx + t$ lässt sich durch den Parameter t, also der ohne Verbindung mit x, nach oben / unten verschieben. Ähnlich ist dies auch bei quadratischen Funktionen $y = ax^2 + bx + c$. Hier hängt der Parameter c mit keinem x, weshalb dieser für die Verschiebung in y-Richtung ist.

Eine quadratische Funktion ist dann in y-richtung Verschoben, wenn der Parameter c geändert wird. (s. Abb. 1)

Eine Funktion nach oben/unten verschobene Normaplparabel wird immer durch den Funktionsterm (9)

$$y = x^2 + c \tag{4}$$

beschrieben. Der Scheitelpunkt liegt bei $S(0 \mid c)$

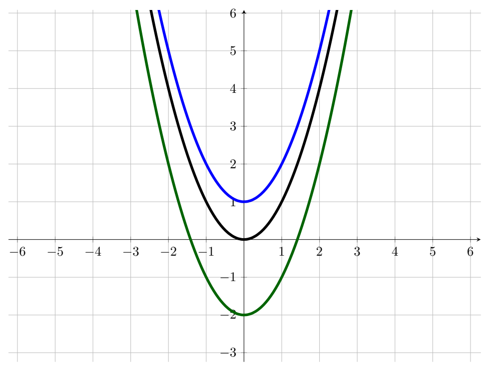

Abbildung 2: Die Parabeln $f(x) = x^2 - 2$ (grün), $g(x) = x^2$ (schwarz), $h(x) = x^2 + 1$ (blau).

2.2 Verschiebung in x-Richtung

Für die Verschiebung einer Parabel in $x-Richtung$ wird eine neue Art von Funktionsterm (5) in Abhängigkeit eines Parameters d eingeführt. Diese Form heißt auch **Scheitelpunktform**.

$$y = (x + d)^2 \Leftrightarrow y = x^2 + 2dx + d^2 \tag{5}$$

Hier ist die Parabel um $-d$ nach links / rechts verschoben (s. Abb. 3). Der Scheitelpunkt liegt dann bei $S(-d \mid 0)$

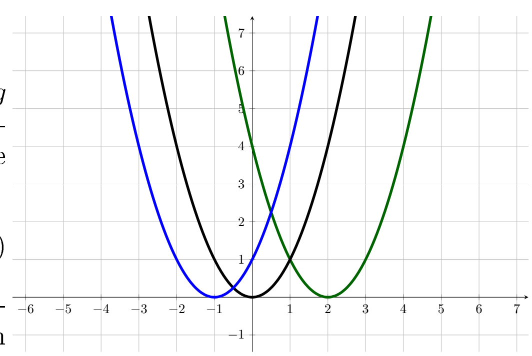

Abbildung 3: Die Parabeln $f(x) = (x - 2)^2$ (grün), $g(x) = x^2$ (schwarz), $h(x) = (x + 1)^2$ (blau).

2.3 Beliebiges Verschieben von Parabeln

Um Parabeln beliebig zu verschieben muss ein neuer Parameter e zur Scheitelpunktform (6) hinzukommen. Dieser verschiebt um x-verschobene Parabeln zusätzlich nach oben/unten. Soll die Parabel noch gestreckt bzw. gestaucht werden muss der Parameter a verwendet werden. siehe (7)

$$y = (x+d)^2 + e = x^2 + 2dx + d^2 + e \tag{6}$$

$$y = a(x+d^2) + e = ax^2 + \underbrace{2adx}_{bx} + \underbrace{ad^2 + e}_{c} \tag{7}$$

Um eine Parabel um 3 nach links und 4 nach oben zu verschieben, müssen die Parameter d und e geändert werden. (s. Abb. 4)
d verschiebt nach links / rechts $\Rightarrow d = 3$, während e nach oben / unten verschiebt. $\Rightarrow e = 4$ Der Funktionsterm ist also

$$y = (x+3)^2 + 4 = x^2 + 6x + 13$$

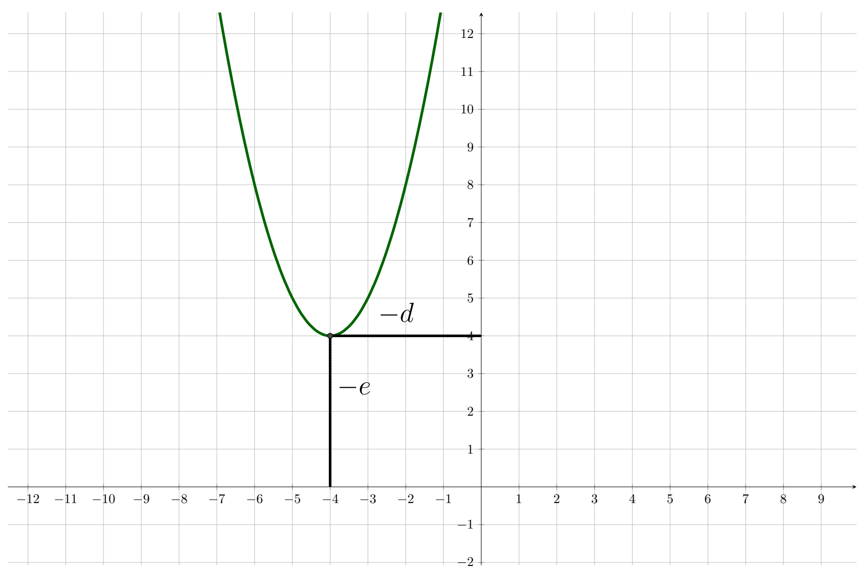

Abbildung 4: Hier wird die Funktion aus dem Beispiel gezeigt. Diese hat die Parameter $d = 3$ und $e = 4$

3 Nullstellen und lösen quadratischer Gleichungen

3.1 Funktionen der Form $y = ax^2 + bx$

Eine Funktion der Form $y = ax^2 + bx$ hat die Extremstelle $x_E = \frac{-b}{2a}$ und die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{b}{a}$, da sich der Funktionsterm zu (8) umformen lässt.

$$y = ax^2 + bx = x(ax + b) \tag{8}$$

Auf die Schreibweise kann man dann die **Regel vom Nullprodukt** anwenden.

Definition 2. *Die Regel vom Nullprodukt besagt, dass eine Produkt 0 ist, sobald einer der Faktoren null ist.*

$$p_1 = 0 \lor ... \lor p_n = 0 \Rightarrow p = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n = 0$$

3.2 Funktionen allgemeiner Form

Für die Nullstellen einer quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ bzw. die Lösung einer quadratischen Gleichung $0 = ax^2 + bx + c$ gibt es folgende (wichtige) Lösungsformel (9).

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{9}$$

Anmerkung. Es gibt immer zwei Lösungen, da $\pm$ bedeutet, dass man $+$ und $-$ rechnet.

4 Zusatz: Gleichungen mit höheren Potenzen lösen.

1. Eine Gleichung der Form $ax^3 + bx^2 + cx = 0$ kann durch die Regel vom Nullprodukt gelöst werden (s. 3.1).

   $$0 = x(ax^2 + bx + c). \tag{10}$$

   Dann steht in den Klammern eine quadratische Gleichung $0 = ax^2 + bx + c$ und außerhalb der Klammer gilt $x = 0$.

2. Eine Gleichung der Form $ax^4 + bx^2 + c = 0$ kann dadurch gelöst werden, dass man ein u definiert für das

   $$u := x^2 \tag{11}$$

   gilt. Setzt man jetzt u ein, so erhält man eine normale quadratische Gleichung mit der Variable u. Ist diese gelöst muss man jetzt noch u in x umformen.

   $$u = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{u} \tag{12}$$