Hoofdstuk IV: goniometrische functies

www.karelappeltans.be

August 18, 2020

1 De goniometrische cirkel

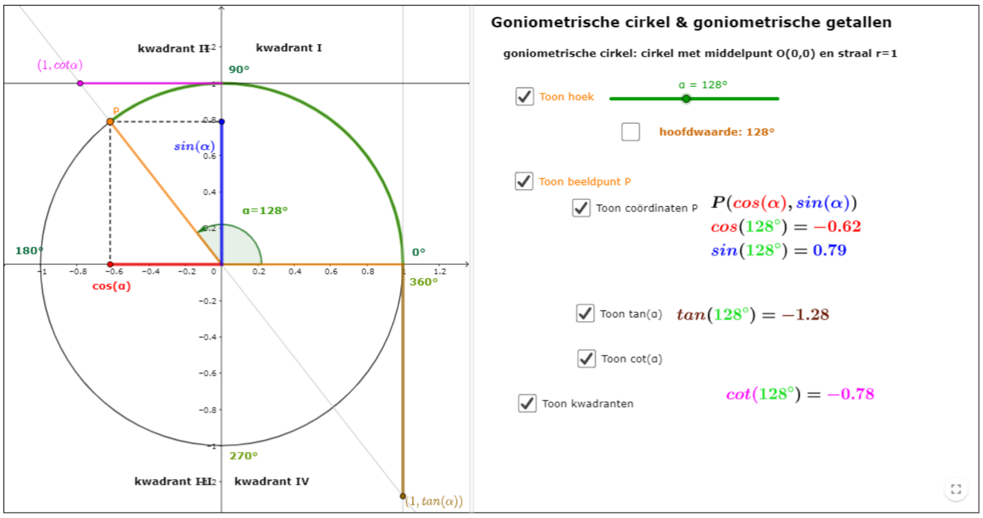


Figure 1: https://www.geogebra.org/m/FrxeHcwA

2 De goniometrische getallen

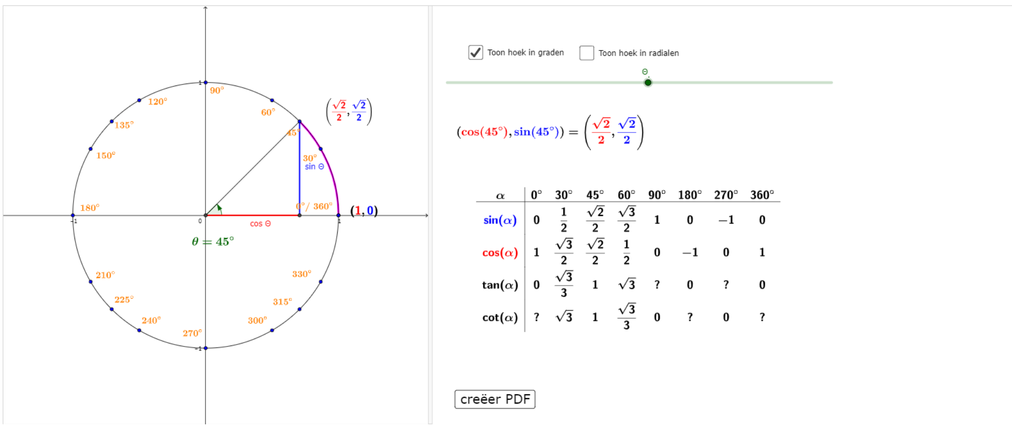


Figure 2: https://www.geogebra.org/m/FrxeHcwA

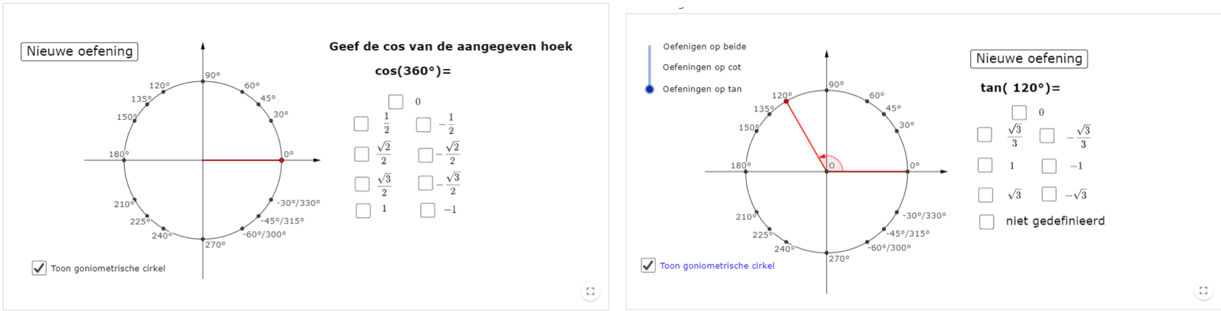


Figure 3: https://www.geogebra.org/m/FrxeHcwA]https://www.geogebra.org/m/FrxeHcwA

3 Verwante hoeken

3.1 supplementaire hoeken

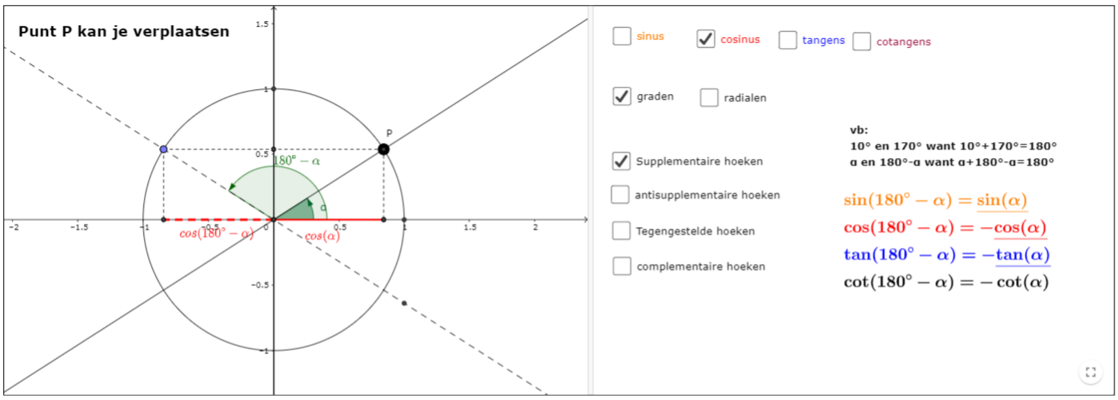


Figure 4: https://www.geogebra.org/m/q27XXAeF

3.2 antisupplementaire hoeken

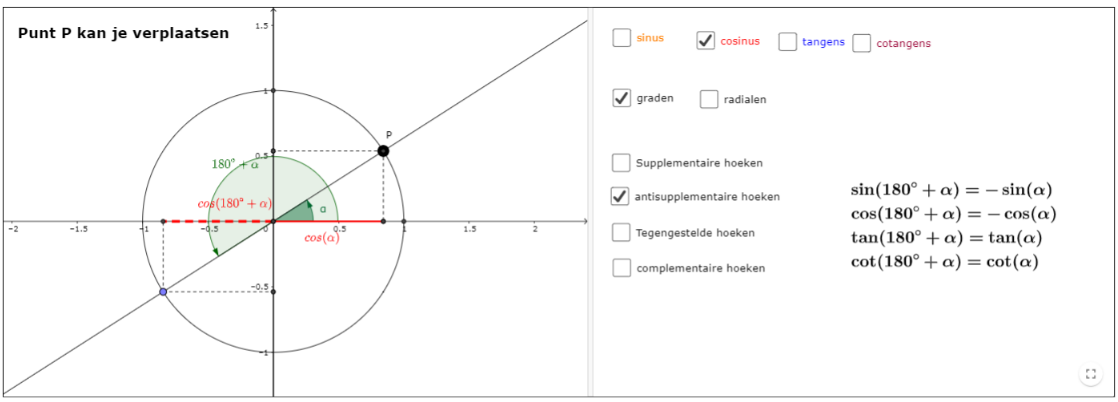


Figure 5: https://www.geogebra.org/m/q27XXAeF

3.3 tegengestelde hoeken

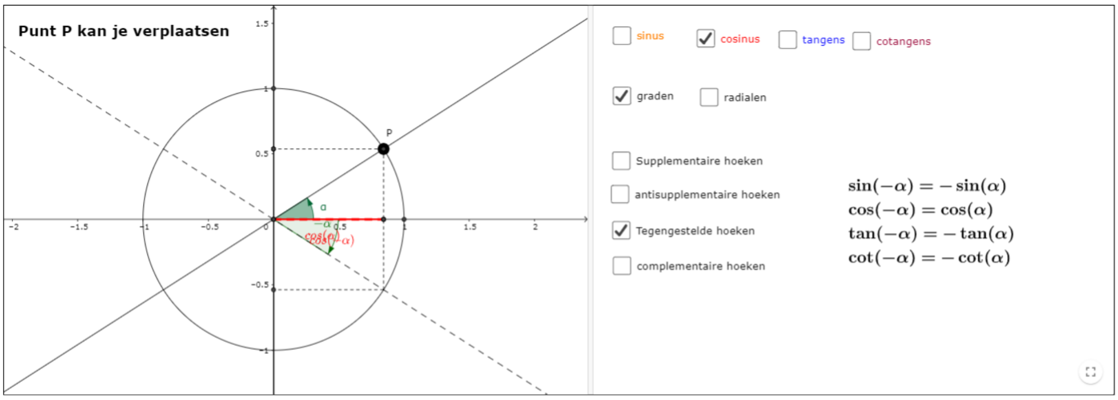


Figure 6: https://www.geogebra.org/m/q27XXAeF

3.4 complementaire hoeken

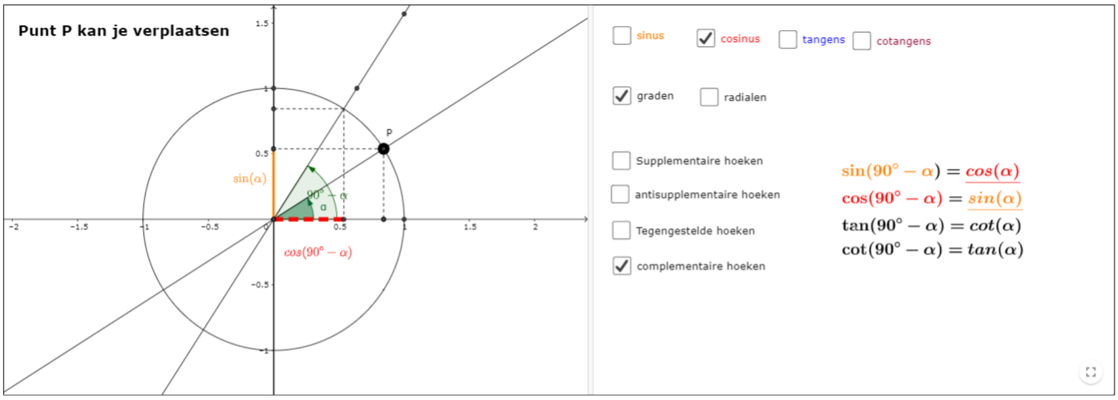


Figure 7: https://www.geogebra.org/m/q27XXAeF

3.5 willekeurige verwantschap

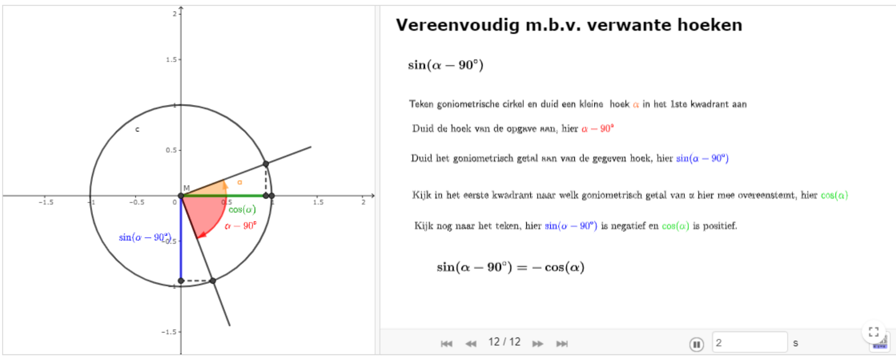


Figure 8: https://www.geogebra.org/m/q27XXAeF

4 sinus- en cosinusregel

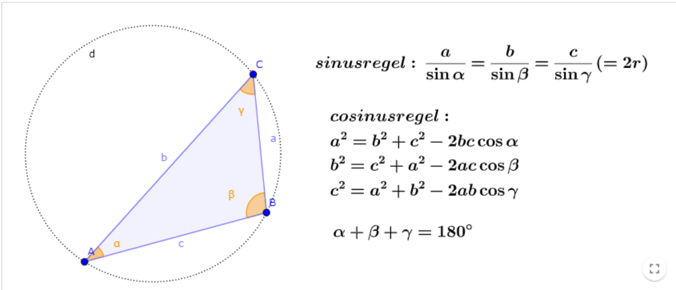


Figure 9: https://www.geogebra.org/m/GcAQVhjZ

5 goniometrische identiteiten

Basisformules

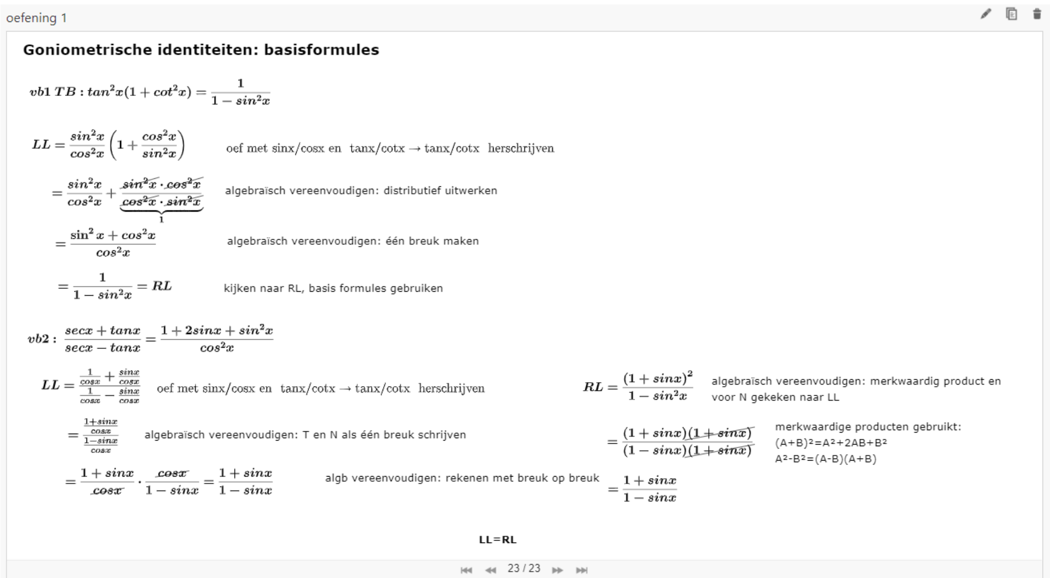
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$



oefening 1

Goniometrische identiteiten: basisformules

$vb1\ TB: tan^2x(1+cot^2x) = \frac{1}{1-sin^2x}$

$LL = \frac{sin^2x}{cos^2x}\left(1 + \frac{cos^2x}{sin^2x}\right)$ oef met sinx/cosx en tanx/cotx → tanx/cotx herschrijven

$= \frac{sin^2x}{cos^2x} + \underbrace{\frac{\cancel{sin^2x}\cdot\cancel{cos^2x}}{\cancel{cos^2x}\cdot\cancel{sin^2x}}}_{1}$ algebraïsch vereenvoudigen: distributief uitwerken

$= \frac{\sin^2x + cos^2x}{cos^2x}$ algebraïsch vereenvoudigen: één breuk maken

$= \frac{1}{1-sin^2x} = RL$ kijken naar RL, basis formules gebruiken

$vb2: \frac{secx + tanx}{secx - tanx} = \frac{1+2sinx+sin^2x}{cos^2x}$

$LL = \frac{\frac{1}{cosx} + \frac{sinx}{cosx}}{\frac{1}{cosx} - \frac{sinx}{cosx}}$ oef met sinx/cosx en tanx/cotx → tanx/cotx herschrijven

$= \frac{\frac{1+sinx}{cosx}}{\frac{1-sinx}{cosx}}$ algebraïsch vereenvoudigen: T en N als één breuk schrijven

$= \frac{1+sinx}{\cancel{cosx}}\cdot\frac{\cancel{cosx}}{1-sinx} = \frac{1+sinx}{1-sinx}$ algb vereenvoudigen: rekenen met breuk op breuk

$RL = \frac{(1+sinx)^2}{1-sin^2x}$ algebraïsch vereenvoudigen: merkwaardig product en voor N gekeken naar LL

$= \frac{(1+sinx)\cancel{(1+sinx)}}{(1-sinx)\cancel{(1+sinx)}}$ merkwaardige producten gebruikt:
(A+B)²=A²+2AB+B²
A²-B²=(A-B)(A+B)

$= \frac{1+sinx}{1-sinx}$

LL=RL

23 / 23

Figure 10: https://www.geogebra.org/m/QfWuM7tH

6 oefeningen

1. Vereenvoudig: $\frac{\cos(90^o - \alpha)\sin(270^o + \alpha)}{\tan(540^o - \alpha)}$

2. Beschouw een niet-rechthoekige driehoek met zijden $a = 23$, $b = 17$ en $\beta = 17^o 23' 29"$. Bereken de andere zijden en hoeken

3.

4. Maak de vragen van de diagnostische toets opnieuw

8. Vereenvoudig:

1. $1 - \cos^2 \alpha$
2. $1 - \sin^2 \alpha$
3. $1 + \dfrac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$
4. $\dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
5. $(\sin^2 \alpha - 1)\ \mathrm{tg}^2\, \alpha$
6. $\dfrac{1}{\cos^2 \alpha} - \mathrm{tg}^2\, \alpha$
7. $\dfrac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} - \dfrac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$
8. $\sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$
9. $\sqrt{1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha}$
10. $\sqrt{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}$
11. $\sqrt{(\sin \alpha - 2)^2}$
12. $\sqrt{(1 - \cos \alpha)^2}$
13. $\sqrt{(1 + 2 \sin \alpha)^2}$
14. $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha + 1$

9. Bewijs de volgende gelijkheden:

1. $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$
2. $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$
3. $(1 - \cos^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha) = (\sin \alpha \cos \alpha)^2$
4. $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$
5. $\dfrac{\mathrm{tg}^2\, \alpha - 1}{\mathrm{tg}^2\, \alpha + 1} = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$
6. $\dfrac{\mathrm{tg}^2\, \alpha - \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \mathrm{tg}^4\, \alpha$
7. $\left(\mathrm{tg}\, \alpha + \dfrac{1}{\mathrm{tg}\, \alpha}\right) \sin \alpha \cos \alpha = 1$
8. $(\sin \alpha + \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cos \alpha) = \sin^3 \alpha + \cos$
9. $(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)\ \dfrac{\mathrm{tg}^2\, \alpha + 1}{\mathrm{tg}^2\, \alpha - 1} = 1$
10. $\dfrac{2\ \mathrm{tg}\, \alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\, \alpha} = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
11. $(2 \sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - 2 \cos \alpha)^2 = 5$
12. $\dfrac{1 - \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 2 \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$

10. Bereken de goniometrische getallen van α als gegeven is:

1. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ en α behoort tot het eerste kwadrant
2. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ en α behoort tot het tweede kwadrant
3. $\mathrm{tg}\, \alpha = \sqrt{3}$ en α behoort tot het derde kwadrant
4. $\mathrm{cotg}\, \alpha = -\frac{15}{8}$ en α behoort tot het vierde kwadrant
5. $\sec \alpha = \frac{5}{3}$ en α behoort tot het eerste kwadrant
6. $\mathrm{cosec}\, \alpha = -2$ en α behoort tot het vierde kwadrant

11. Bereken met behulp van de zakrekenmachine en rond het re op 5 decimalen:

1. sin 82°13'
2. cos 34°56'21"
3. tg 62°53'44"
4. sin 164°8'20"
5. cos 96°0'35"
6. tg 126°30'30"
7. sin (– 92°17'8")
8. cos (– 15°25'35")
9. tg (– 103°3'4")
10. cosec 219°18'15"
11. sec 300°15'40"
12. cotg (– 49°18'45")

12. Van een hoek α is een goniometrisch getal gegeven.
Construeer in een goniometrische cirkel de georiënteerde hoeken α_1 en α_2 die hieraan voldoen.
Bereken daarna α_1 of α_2 met de zakrekenmachine.

1. $\sin\alpha = 0{,}25$
2. $\cos\alpha = -0{,}75$
3. $\operatorname{tg}\alpha = 2$
4. $\operatorname{cotg}\alpha = 2$
5. $\operatorname{cosec}\alpha = -2{,}5$
6. $\sec\alpha = \dfrac{5}{4}$
7. $\operatorname{tg}\alpha = -3$
8. $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

13. Vereenvoudig

1. $\sqrt{\sin^2 208° + \cos^2 208° + \operatorname{tg}^2 208°}$
2. $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + 1$
3. $(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha)^{-1}$
4. $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha - 1$
5. $\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}$
6. $2\sec^2\alpha\cos^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{cotg}^2\alpha$
7. $\sin^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta$
8. $\dfrac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} + \dfrac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$

14. Bewijs de volgende gelijkheden:

1. $(\operatorname{cosec}\alpha - \sin\alpha)(\sec\alpha - \cos\alpha) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha}$
2. $\operatorname{cotg}\alpha \cdot \sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$
3. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = \sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha$
4. $\sec^2\alpha(1 - \sin^4\alpha) - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$
5. $(\sec^4\alpha - \operatorname{tg}^4\alpha)(\operatorname{cosec}^4\alpha - \operatorname{cotg}^4\alpha) = 1 + \dfrac{2}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$
6. $\operatorname{cosec}^4\alpha(1 - \cos^4\alpha) - 2\operatorname{cotg}^2\alpha = 1$
7. $\cos^6\alpha + \sin^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$
8. $3 + 4\operatorname{cotg}^2\alpha = 3\operatorname{cosec}^2\alpha + \operatorname{cotg}^2\alpha$

15. Bepaal de eventuele voorwaarden waaraan $r \in \mathbb{R}$ moet voldc

1. $\operatorname{tg}\alpha = r$ en $\sec\alpha = r + \dfrac{1}{2}$
2. $\sin\alpha = r$ en $\cos\alpha = r$
3. $\sin\alpha = \dfrac{r-1}{2}$ en $\cos\alpha = \dfrac{r+1}{2}$
4. $\sin\alpha = \dfrac{r-2}{8-r}$
5. $\cos\alpha = r - 5$
6. $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{r^2 - 5r + 5}$

16. Welke betrekking bestaat er tussen $a, b, c, d \in \mathbb{R}_0$ als $a = b\sin\varphi$ en $c = d\cos\varphi$?

17. Bereken $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ en $\operatorname{tg}\alpha$ als gegeven is:

1. $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ en α behoort tot het derde kwa
2. $|\operatorname{tg}\alpha| = 2 - \sqrt{3}$ en α behoort tot het tweede kwadra
3. $3\sin\alpha = 4\cos\alpha$
4. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}\sec\alpha$

Bij 3. en 4. bepaal je zelf het kwadrant waarin α kan gelegen zijn en groepeer je de (per kwadrant).