Rose geschlossen:

Fall 1:

$$\theta = (2m_1+1)\cdot\pi \quad \text{und} \quad r = -1$$

$$\Downarrow$$

$$k\cdot\theta = (2m_2+1)\cdot\pi$$

$$\Downarrow$$

$$\theta = \frac{(2m_2+1)}{k}\cdot\pi$$

$$k = \frac{2m_2+1}{2m_1+1} =: \frac{p}{q} \quad \left.\right\} \text{„Vollständig gekürzt"}$$

$$\Longrightarrow \begin{matrix} 2m_2+1 = p \\ \text{und} \\ 2m_1+1 = q \end{matrix} \Bigg\} \Longrightarrow \text{Fall tritt nur auf, wenn } q \text{ und } q \text{ ungerade}$$

$$\Longrightarrow \theta = q\cdot\pi$$

Fall 2:

$$\theta = n_1\cdot 2\pi \quad \text{und} \quad r = 1$$

$$\Downarrow$$

$$k\cdot\theta = n_2\cdot 2\pi$$

$$\Downarrow$$

$$\theta = \frac{n_2}{k}\cdot 2\pi$$

$$k = \frac{n_2}{n_1} =: \frac{p}{q} \quad \left.\right\} \text{„Vollständig gekürzt"}$$

$$\Longrightarrow n_1 = q$$

$$\Longrightarrow \theta = q\cdot 2\pi$$