In einem Naturschutzgebiet soll eine Vogelart ausgewildert werden. Über einen längeren Zeitraum beobachten die Forscher, wie sich die neue Population entwickelt.

Die Funktion a ordnet jedem Zeitpunkt t in Jahren den verbliebenen Anteil $a(t)$ der ursprünglich ausgewilderten Vögel zu.

$a(t) = (200\,t^3 - 500\,t^2 + 100\,t + 50)\,e^{-2\,t} + 50,\ t \geq 0$

a) *Geben Sie* $a(0)$ *an* und interpretieren Sie den Wert im Sachkontext.
100 % der Tiere sind noch vorhanden

b) Berechnen Sie $a'\left(\frac{1}{2}\right)$ und interpretieren Sie auch diesen Wert im Sachkontext.
-91 % pro Jahr
Zum Zeitpunkt ½ Jahr nimmt der Anteil mit -91,97 % pro Jahr ab

c) *Bestimmen Sie* ***rechnerisch*** den niedrigsten Stand des verbliebenen Anteils im Modellzeitraum $0 \leq t \leq \infty$.
Globales Minimum
Das globale Minimum befindet sich entweder an der Stelle eines lokalen Minimums oder an einer Randstelle.
Notwendige Bedingung:

$$a'(t) = 0 | CAS$$

t	-1	$t_1 = 0$	$\frac{1}{2}$	$t_2 = 1$	2	$t_3 = 3$	
$a'(t)$	23645	0	-91,7	0	14,7	0	
	↗		↘		↗		

An der Stelle $t_2 = 1$ befindet sich ein lokales Minimum.

$$a(0) = 100$$
$$a(1) = 29{,}7$$
$$a(t) = 50 \text{ für } t \to \infty$$

Der niedrigste Anteil im Modellzeitraum beträgt 29,7 %

d) *Begründen Sie* am Funktionsterm, dass der langfristige Anteil der Vögel 50% beträgt.

$$e^{-2t} \to 0, wenn\ t \to \infty$$

Deswegen bleibt für $t \to \infty$ bleibt im Funktionsterm nur 50.

e) *Bestimmen Sie* die stärkste Abnahme des Anteils im Modellzeitraum.
Die störkste Abnahme findet zum Zeitpunkt 0,2679 Jahre mit -125,4 Prozent pro Jahr statt.
Nullstelle von a'' in der Grafik bestimmt.
Funktionswert von a' an der Stelle berechnet

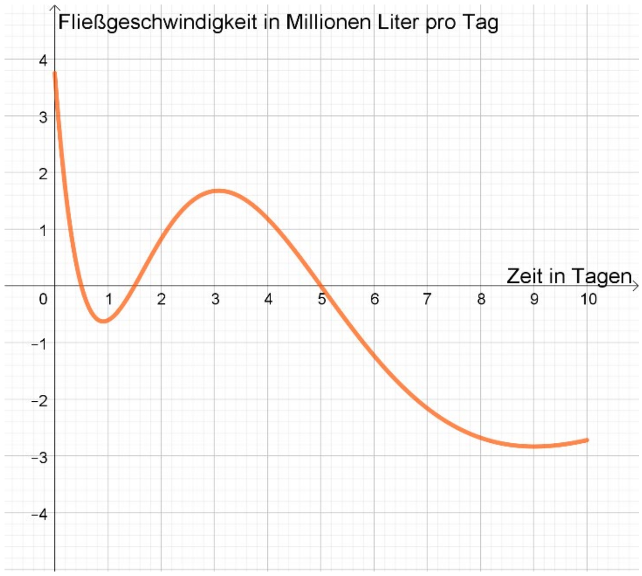
f) Erläutern Sie, wie Sie zeigen können, dass in den ersten 3 Jahren der durchschnittliche verbliebene Anteil etwa 48,6% der ursprünglichen ausgewilderten Vögel betrug, ohne die Rechnung selbst durchzuführen.

$$\frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$
$$\frac{1}{3-0}\int_0^1 a(t)dt$$

Der Zu- und Abfluss zu einem großen Benzintank wird gemessen und mithilfe der Funktion z modelliert für einen Zeitraum von 10 Tagen modelliert.

$$z(x) = (-x^3 + 7\,x^2 - 10.75\,x + 3.75) \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x}$$

Die Funktion z ordnet jedem Zeitpunkt x in Tagen die Fließgeschwindigkeit des Benzins $z(x)$ in 1 Million Liter pro Tag zu.



1 a(x):=(-x^3+7x^2-10.75x+3.75)*exp(-1/2*x)

✓ $a(x) := \left(-x^3 + 7\,x^2 - 10.75\,x + 3.75\right) e^{\frac{-1}{2}x}$

Zunächst gebe ich die Funktion in Geogebra ein. Achtung! Ich Geogebra dürfen Funktionen weder x,y noch z heißen. Deshalb nenne ich die Funktion a und nicht z, wie in der Aufgabe.

a) Geben Sie $z(1)$ an und interpretieren Sie den Wert im Sachkontext.

2 a(1)

$\rightarrow -\frac{1}{\sqrt{e}}$

3 \$2

≈ -0.6065

Der Operator lautet „Geben Sie an“. Deswegen schreibe ich nur

$$a(1) = -0{,}6065$$

auf und die Interpretation:

Zum Zeitpunkt 1 Tag nimmt die Benzinmenge im Tang mit -0,6065 Millionen Liter pro Tag ab.

b) Berechnen Sie $z'(3)$ und interpretieren Sie den Wert im Sachkontext.

4 a'(3)

≈ 0.1115650801

$$a'(3) = -0{,}2027$$

Interpretation: Die Fließgeschwindigkeit nimmt zum Zeitpunkt 3 Tage mit -0,2027 Millionen Liter pro Tag pro Tag ab.

c) Bestimmen Sie rechnerisch die stärkste Abflussgeschwindigkeit innerhalb des Modellzeitraumes.
Es wird das globale Minimum im Modellzeitraum gesucht.
Zunächst lokale Minima:
Notwendige Bedingung

$$a'(x) = 0 | CAS$$

6 Löse(a'(x)=0)
$\approx \{x = 0.9099561302, x = 3.0796046409, x = 9.0104392288\}$

$$x_1 \approx 0{,}90996, x_2 \approx 0{,}30796, x_3 \approx 9{,}0104$$

Die erste Lösung liegt außerhalb des Modellzeitraumes.
Weitere Untersuchung mit dem VZWK

x	0	$x_1 \approx 0{,}90996$	1	$x_2 \approx 3{,}0796$	4	$x_3 \approx 9{,}0104$	9,5
$a'(x)$	-12,625	0	0,455	0	-0,9643	0	0,1168
	↘	TP	↗	HP	↘	TP	↗

7 a'(x):=Ableitung(a(x))
$\approx a'(x) := 19.375\, x\, e^{-0.5x} - 6.5\, x^2\, e^{-0.5x} + 0.5\, x^3\, e^{-0.5x} - 12.6$

8 {a'(0),a'(1),a'(4),a'(9.5)}
$\approx \{-12.625, 0.4548979948, -0.9642638931, 0.1167978852\}$

An den Stellen x_1 und x_3 befinden sich lokale Minima.
Funktionswerte an den Stellen der lokalen Minima und an den Randstellen.

$$a(0) = 3{,}75$$
$$a(0{,}90996) = -0{,}628$$
$$a(9{,}0104) = -2{,}8328$$
$$a(10) \approx -2{,}7204$$

Die stärkste Abflussgeschwindigkeit beträgt -0,2,8328 Millionen Liter pro Tag zum Zeitpunkt 0,87 Tage.

9 {a(0), a(Ersetze(x,Element($6,1))), a(Ersetze(x,Element($6,3))), a(10)}
$\approx \{3.75, -0.6277044259, -2.832808603, -2.7204461009\}$

d) Zu Beginn des Modellzeitraumes befinden sich 6,33 Millionen Liter Benzin im Tank.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion B, die jedem Zeitpunkt x in Tagen die Benzinmenge $B(z)$ in Millionen Liter zuordnet.
Zur Kontrolle und zum Weiterrechnen:

$$B(x) = (2\,x^3 - 2\,x^2 + 13.5\,x + 19.5)\,e^{\frac{-1}{2}x} - 13.17$$

B ist die Bestandsfunktion und deshalb eine Stammfunktion von a. Die Stammfunktionen von a bestimmt man mithilfe von Geogebra:

10 Integral(a(x))
$\approx c_2 + 2\,x^3\,e^{-0.5x} - 2\,x^2\,e^{-0.5x} + 13.5\,x\,e^{-0.5x} + 19.5\,e^{-0.5x}$

$$B(x) = (2x^3 - 2x^2 + 13{,}5x + 19{,}5) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + C$$

Mit der Bedingung, dass zu Beginn 6,33 Millionen Liter im Tank sind, findet man C heraus:

$$B(0) = 6{,}33$$
$$19{,}5 + C = 6{,}33 | -19{,}5$$
$$C = -13{,}17$$

e) Entscheiden Sie, ob der Tank am Ende des Modellzeitraums leer ist.

$$B(10) \approx -0{,}00068$$

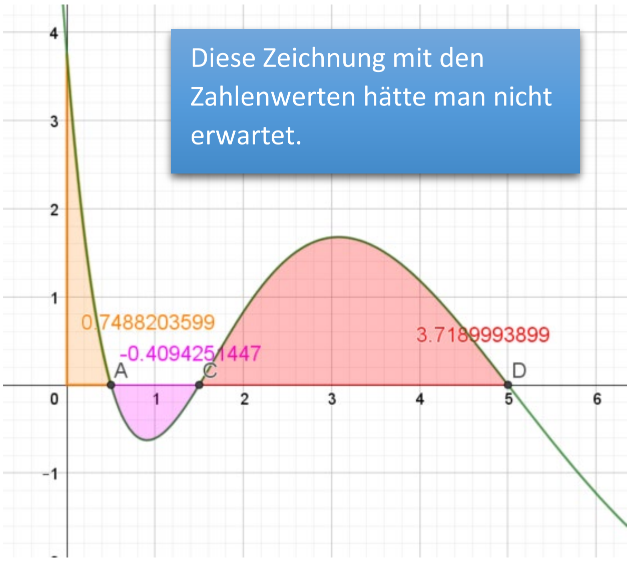
Das ist nicht sinnvoll. Der Tank muss bereits leer sein.

Alternative:

$$B(x) = 0 | CAS$$
$$x \approx 9{,}99975$$

Der Tank ist also schon kurz vor dem Ende des Modellzeitraumes leer.

f) Begründen Sie am Graphen von z, dass zum Zeitpunkt 5 Tage die Benzinmenge im Tank maximal ist.



Die Funktion a beschreibt die Änderungsrate von B, es gilt also $a(x) = B'(x)$. Zum Zeitpunkt $x = 5$ wechselt das Vorzeichen von a von $+$ nach $-$. Deshalb hat B an der Stelle $x = 5$ an lokales Maximum. Vergleicht man nun noch die Flächen, die ein Maß für die geflossene Benzinmenge sind, so sieht man, dass die Fläche oberhalb der x-Achse viel größer ist als unterhalb der x-Achse. Deshalb muss die Benzinmenge zum Zeitpunkt $x = 5$ Tage maximal sein.