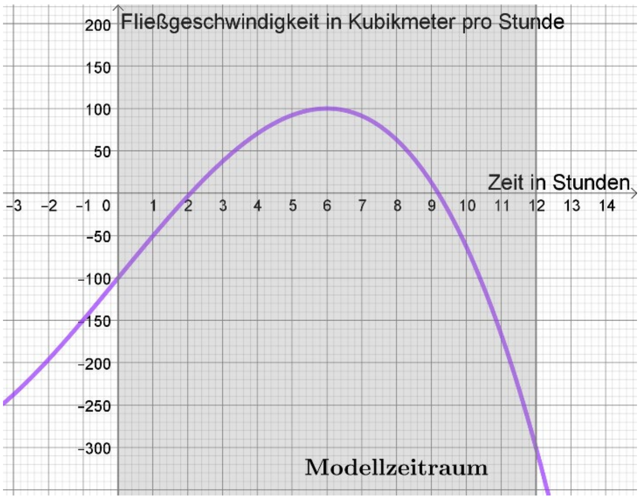
In einem Tanklager für Benzin wird die die Fließgeschwindigkeit des Benzins am Ein- und Auslauf ständig gemessen.

Die Funktion f ordnet jedem Zeitpunkt t in Stunden die Fließgeschwindigkeit $f(t)$ in $\frac{m^3}{h}$ (Kubikmeter pro Stunde) zu.

Für einen Zeitraum von 0 bis 12 Stunden kann die Fließgeschwindigkeit gut durch die Funktion f modelliert werden.

$$f(t) = -\frac{25}{54}t^3 + 50t - 100$$



a) *Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen im Sachkontext.*

b) *Geben Sie die Fließgeschwindigkeit zum Zeitpunkt 5 Stunden an!*

c) *Berechnen Sie $f'(1)$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachkontext.*

d) *Geben Sie die Nullstellen von f auf zwei Stellen nach dem Komma an und interpretieren Sie die Werte im Sachkontext.*

e) *Bestimmen Sie rechnerisch die höchste Fließgeschwindigkeit im Modellzeitraum.*

f) Zu Beginn des Modellzeitraumes befinden sich $120m^3$ Benzin im Lager.

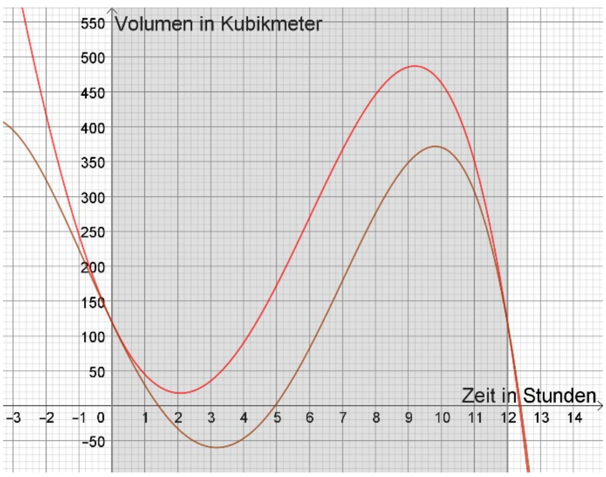
(1) *Geben Sie begründet, mithilfe des Graphen, ungefähr den Zeitpunkt an, zu dem die Benzinmenge im Lager maximal ist.*

(2) Es gilt

$$\int_0^{12} f(t)dt = 0$$

Interpretieren Sie dieses Ergebnis im Sachkontext.

g) *Entscheiden Sie begründet, welcher der beiden Graphen den Verlauf des Benzinvolumens richtig modelliert.*

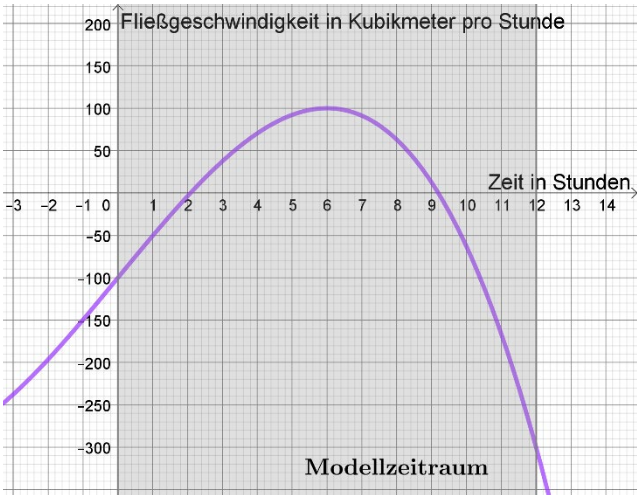


In einem Tanklager für Benzin wird die die Fließgeschwindigkeit des Benzins am Ein- und Auslauf ständig gemessen.

Die Funktion f ordnet jedem Zeitpunkt t in Stunden die Fließgeschwindigkeit $f(t)$ in $\frac{m^3}{h}$ (Kubikmeter pro Stunde) zu.

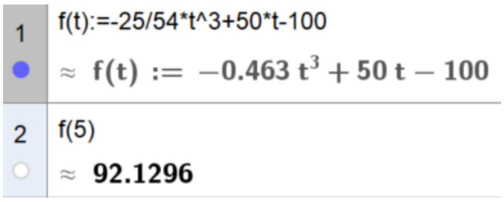
Für einen Zeitraum von 0 bis 12 Stunden kann die Fließgeschwindigkeit gut durch die Funktion f modelliert werden.

$$f(t) = -\frac{25}{54}t^3 + 50t - 100$$

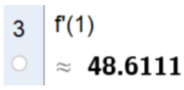


a) *Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen im Sachkontext.*
Zu Beginn des Modellzeitraumes beträgt die Fließgeschwindigkeit -100 m³/h. Die Fließgeschwindigkeit bleibt bis ca. 2 Stunden negativ, d. h., bis zu diesem Zeitpunkt fließt Benzin aus dem Lager heraus. Zwischen den Zeitpunkten 2 Stunden und 9,5 Stunden ist die Fließgeschwindigkeit positiv, das bedeutet, dass Benzin in den Tank hineinfließt. Zum Zeitpunkt 6 Stunden ist die Fließgeschwindigkeit mit 100 m³/h maximal. Ab dem Zeitpunkt 9,5 Stunden ist die Fließgeschwindigkeit bis zum Ende des Modellzeitraums negativ. Am Ende des Modellzeitraumes, also zum Zeitpunkt 12 Stunden, hat die Fließgeschwindigkeit mit -300 m^3/h den größten negativen Wert.

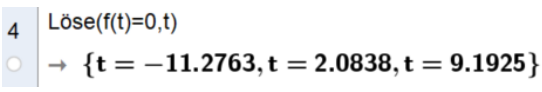
b) *Geben Sie die Fließgeschwindigkeit zum Zeitpunkt 5 Stunden an!*
$f(5) \approx 92{,}13$
Zum Zeitpunkt 5 Stunden beträgt die Fließgeschwindigkeit ca. 92,12 $\frac{m^3}{h}$.



c) *Berechnen Sie $f'(1)$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachkontext.*
$f'(1) \approx 48{,}61$
Zum Zeitpunkt 1 Stunde steigt die Fließgeschwindigkeit mit ca. 48,61 m³/h pro Stunde.



d) *Geben Sie die Nullstellen von f auf zwei Stellen nach dem Komma an und interpretieren Sie die Werte im Sachkontext.*
$f(t) = 0 | CAS$
$t \approx -11{,}28 \vee t \approx 2{,}08 \vee t \approx 9{,}19$



Innerhalb des Modellzeitraumes gibt es 2 Nullstellen. Die Fließgeschwindigkeit beträgt 0 m³/h zu den Zeitpunkten 2,08 Stunden und 9,19 Stunden.

e) *Bestimmen Sie rechnerisch die höchste Fließgeschwindigkeit im Modellzeitraum.*

Notwendige Bedingungen für ein lokales Extremum

$$f'(t) = 0 | CAS$$
$$t = -6 \lor t = 6$$

die negative Lösung liegt außerhalb des Modellzeitraumes und muss deshalb nicht weiter beachtet werden. Weitere Untersuchung mit dem Vorzeichenwechselkriterium:

5	Löse(f'(t)=0,t)
	$\approx \{t = -6, t = 6\}$
6	{f'(0),f'(6),f'(12)}
	$\approx \{50, 0, -150\}$
7	{f(0),f(6),f(12)}
	$\approx \{-100, 100, -300\}$

t	0	6	12
$f'(t)$	-50	0	-150
	↘	↘↗	↘

An der Stelle t = 6 liegt ein lokales Maximum vor. Das globale Maximum im Modellzeitraum befindet sich entweder an der Stelle eines lokalen Maximums oder an einer Randstelle.

t	0	6	12
$f(t)$	-100	100	-300

Zum Zeitpunkt 6 Stunden ist die Fließgeschwindigkeit mit 100 m^3/h maximal.

f) Zu Beginn des Modellzeitraumes befinden sich $120m^3$ Benzin im Lager.

(1) *Geben Sie begründet, mithilfe des Graphen, ungefähr den Zeitpunkt an, zu dem die Benzinmenge im Lager maximal ist.*

Zwischen den Zeitpunkten ca. 2 Stunden und ca. 9,5 Stunden fließt Benzin in den Tank. Davor und danach fließt Benzin aus dem Tank heraus. Deshalb muss zum Zeitpunkt ca. 9,5 Stunden die Benzinmenge im Tank maximal sein.

(2) Es gilt

$$\int_0^{12} f(t)dt = 0$$

Interpretieren Sie dieses Ergebnis im Sachkontext.

Der mathematische Ausdruck berechnet die Änderung der Benzinmenge im Tank zwischen den Zeitpunkten 0 Stunden und 12 Stunden, also während der gesamten Zeit des Modellzeitraumes.

Am Ende des Modellzeitraumes hat sich die Benzinmenge gegenüber der Benzinmenge am Anfang des Modellzeitraumes nicht geändert. Man kann auch sagen, dass am Ende des Modellzeitraumes genauso viel Benzin im Tank ist wie am Anfang des Modellzeitraumes.

g) *Entscheiden Sie begründet, welcher der beiden Graphen den Verlauf des Benzinvolumens richtig modelliert.*

Der oberhalb verlaufende Graph (rot) beschreibt den Verlauf des Benzinvolumens im Tank.

Begründung: der andere Graph verläuft im Negativen. Es kann aber keine negativen Volumina geben.

Weitere Begründung: die Benzinmenge muss an der Stelle , t = 2 Stunden minimal sein da die Funktion f an dieser Stelle eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel vom Negativen ins Positive besitzt.