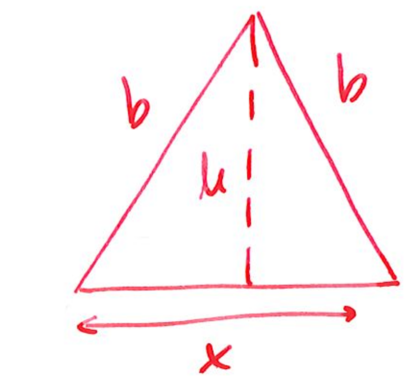


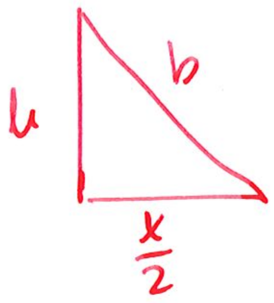
Función a maximizar

$$A(x,h) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot h$$

Relaciones existentes

① $\boxed{2b + x = 50}$ → Por enunciado

② $\boxed{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 = b^2}$ → Por pitágoras



En ① → $b = \frac{50 - x}{2}$

En ② $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{50-x}{2}\right)^2$

$$\frac{x^2}{4} + h^2 = \frac{(50-x)^2}{4}$$

$$\frac{x^2}{4} + h^2 = \frac{2500 - 100x + x^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{2500 - 100x + x^2}{4} - \frac{x^2}{4} = \frac{2500 - 100x}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{2500 - 100x}{4}} = \sqrt{625 - 25x} = \sqrt{5^4 - 5^2 x} =$$

$$= \sqrt{5^2(5^2 - x)} = 5\sqrt{25 - x}$$

$A(x, h) = \frac{1}{2} x \cdot h$

$h = 5\sqrt{25-x}$

Queremos convertir una función de dos variables en una función de una única variable:

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \left(5\sqrt{25-x}\right)$$

$$\boxed{A(x) = \frac{5}{2} x \cdot \sqrt{25-x}}$$

Nuestro objetivo es encontrar el máximo de esta función.

$$A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{625-25x} = \frac{1}{2}x\sqrt{5^4-5^2x} =$$

$$= \frac{1}{2}x\cdot\sqrt{5^2\cdot(5^2-x)} = \frac{1}{2}x\cdot 5\cdot\sqrt{5^2-x} = \frac{1}{2}\cdot 5x\cdot\sqrt{25-x} =$$

$$= \boxed{\frac{5}{2}x\sqrt{25-x}}$$

<u>Cálculo de la derivada</u>

$$A'(x) = \frac{5}{2}\left[\sqrt{25-x} + x\cdot\frac{1}{2}(25-x)^{-1/2}(-1)\right] =$$

$$= \frac{5}{2}\cdot\left[\sqrt{25-x} - \frac{x}{2\sqrt{25-x}}\right] = \frac{5}{2}\left[\frac{2\left(\sqrt{25-x}\right)^2 - x}{2\sqrt{25-x}}\right] =$$

$$= \frac{5}{2}\left[\frac{2(25-x)-x}{2\sqrt{25-x}}\right] = \frac{5}{2}\left[\frac{50-3x}{2\sqrt{25-x}}\right] =$$

$$= \frac{5}{4}\cdot\frac{50-3x}{\sqrt{25-x}} = \frac{5}{4}\cdot\frac{(50-3x)\cdot\sqrt{25-x}}{\left(\sqrt{25-x}\right)^2} =$$

$$= \frac{5}{4}\cdot\frac{(50-3x)\cdot\sqrt{25-x}}{25-x} = \frac{(250-15x)\sqrt{25-x}}{100-4x}$$

Búsqueda de máximos

$A'(x) = 0$

$$\boxed{\frac{250 - 15x}{100 - 4x} \cdot \sqrt{25 - x} = 0}$$

$$(250 - 15x) \cdot \sqrt{25 - x} = 0$$

Dado que el producto de los dos factores es igual a cero existen dos posibilidades

$$250 - 15x = 0 \longrightarrow x = \frac{-250}{-15} = \frac{50}{3} = 16,\hat{6}$$

$$\sqrt{25 - x} = 0 \longrightarrow x = 25$$

Observa que partíamos de que $\boxed{x + 2b = 50}$ luego x no puede ser mayor que 25 y tampoco tiene sentido que $x = 25$ porque la altura sería 0 y el área inexistente.

$-\infty$ $\quad x = \frac{50}{3} \quad$ $+\infty$

$A'(x) > 0$ CRECE $\quad$ $A'(x) < 0$ DECRECE

Por tanto en $x = \frac{50}{3}$ hay un máximo relativo.

Para $x = \frac{50}{3}$ cm el área del triángulo es máxima.

El triángulo tendrá base $= \frac{50}{3}$ y altura

$$h = 5\sqrt{25 - x} = 5 \cdot \sqrt{25 - \frac{50}{3}} = 5\sqrt{\frac{75}{3} - \frac{50}{3}} =$$

$$= 5\sqrt{\frac{25}{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt{25}}{\sqrt{3}} = \frac{25}{\sqrt{3}} = \frac{25\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

El triángulo isósceles de perímetro 50 cm cuya superficie es máxima tiene base $\frac{50}{3}$ cm y altura $\frac{25\sqrt{3}}{3}$ cm.