Problemas tipo de Selectividad sobre matrices y determinantes

CURSO	TEMA	WWW.DANIPARTAL.NET
2ºBach CCSS	Tema 4. Matrices y determinantes	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

PROBLEMA 1

A, B y C son matrices de dimensión 2x2. D es una matriz de dimensión 2x3. Razone si se pueden realizar las siguientes operaciones. En caso afirmativo, indique la dimensión de la matriz resultante.

a) $A^t \cdot B + D \cdot D^t$

b) $D \cdot B^t + A$

c) $D^t \cdot A^t + D$

Datos del problema: A, B, C son matrices 2 x 2. D es una matriz 2 x 3

a) **Operación: $A^t \cdot B + D \cdot D^t$**

- A^t: 2 x 2
- B: 2 x 2

El producto $A^t \cdot B$ sí se puede realizar, y el resultado es una matriz 2 x 2.

- D: 2 x 3
- D^t: 3 x 2

El producto $D \cdot D^t$ sí se puede realizar, y el resultado es una matriz 2 x 2

Como ambas matrices resultantes son 2 x 2, **se pueden sumar**.

b) **Operación: $D \cdot B^t + A$**

- D: 2 x $\underline{3}$
- B^t: $\underline{2}$ x 3

El producto $D \cdot B^t$ no se puede realizar, porque el número de columnas de la primera matriz no coincide con el número de filas de la segunda matriz.

Si el producto de estas dos matrices no se puede realizar, **la operación final tampoco se puede realizar.**

c) **Operación: $D^t \cdot A^t + D$**

- D^t: 3 x $\underline{2}$
- A^t: $\underline{2}$ x 2

El producto $D^t \cdot A^t$ sí se puede realizar, dando como resultado una matriz 3 x 2.

- D: 2 x 3

La suma final **no se podría realizar, porque ambos sumandos no tienen las mismas dimensiones** (un sumando es una matriz 3 x 2, mientras que otro sumando es una matriz 2 x 3).

PROBLEMA 2

Sean las matrices

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 5 - a^2 \\ a - 1 \\ a^2 \end{pmatrix}$

a) Halle el valor de a para que se verifique que $M^t \cdot V = (5 \quad 1 \quad 5)^t$.

b) Calcule M^{-1} y resuelve la ecuación matricial $X \cdot M - I_3 = N$.

c) Razone si las operaciones $2 \cdot V \cdot N^t$ y $(N + M^t) \cdot V$ se pueden realizar y, en aquellos casos en que sea posible, indique la dimensión de la matriz resultante.

a) *Primero calculamos M^t:*

$$M^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos:

$$M^t \cdot V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 - a^2 \\ a - 1 \\ a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + 3 \\ a^2 + a - 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Igualamos a $(5 \quad 1 \quad 5)^t \rightarrow \begin{cases} 2a + 3 = 5 \\ a^2 + a - 1 = 1 \end{cases} \rightarrow$ ***a = 1***

b) $X \cdot M = N + I_3 \rightarrow X = (N + I_3) \cdot M^{-1}$

$$N + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$adj\ (M)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|M| = 1 + 0 + 2 - 1 - 0 - 0 = 2$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Multiplicamos: $(N + I_3) \cdot M^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

c) *V: 3 filas x 1 columna*

N^t: 3 filas x 3 columnas

Por lo tanto $2 \cdot V \cdot N^t$ ***no se puede multiplicar*** *porque el número de columnas de la primera matriz (1) no coincide con el número de filas de la segunda matriz (3)*

$N + M^t$ es una matriz 3 filas x 3 columnas. V es una matriz de 3 filas x 1 columna

Por lo tanto, ***sí se puede multiplicar*** $(N + M^t) \cdot V$*, resultando una matriz de 3 filas y 1 columna.*

PROBLEMA 3

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Pruebe que se verifica que $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I_3)$.

b) Dada la ecuación matricial $X^t A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, determine la dimensión de X y resuelva la ecuación.

a)

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow adj\ (A)^{\,t} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left|A\right| = 2 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 2$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 4A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 4A + 5I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Se cumple la igualdad.

b) Dada la ecuación matricial $X^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, determine la dimensión de X y resuelva la ecuación.

- *El segundo miembro es 2 filas x 3 columnas*
- *El primer miembro consta de:*
  - *X^t: n x 3*
  - *A: 3 x 3*
  - *Para poder multiplicar*
- *Para que sean iguales los dos miembros: n = 2*

Por tanto, X^t: 2 x 3 → X tendrá dimensión 3 x 2

Resolvemos:

$$X^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A^{-1}$$

$$X^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$X^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$