

PUNTO DE DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

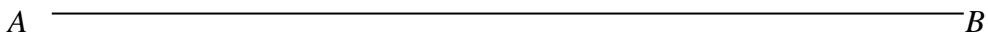


El Problema de la escuela

Supongamos que la figura siguiente representa el patio de una escuela.

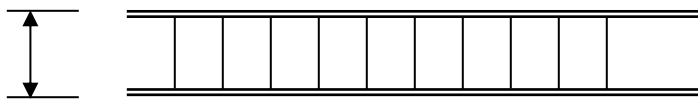


¿Cómo se haría para dividir el lado \overline{AB} en 7 partes iguales, sin utilizar algún metro o regla graduada?



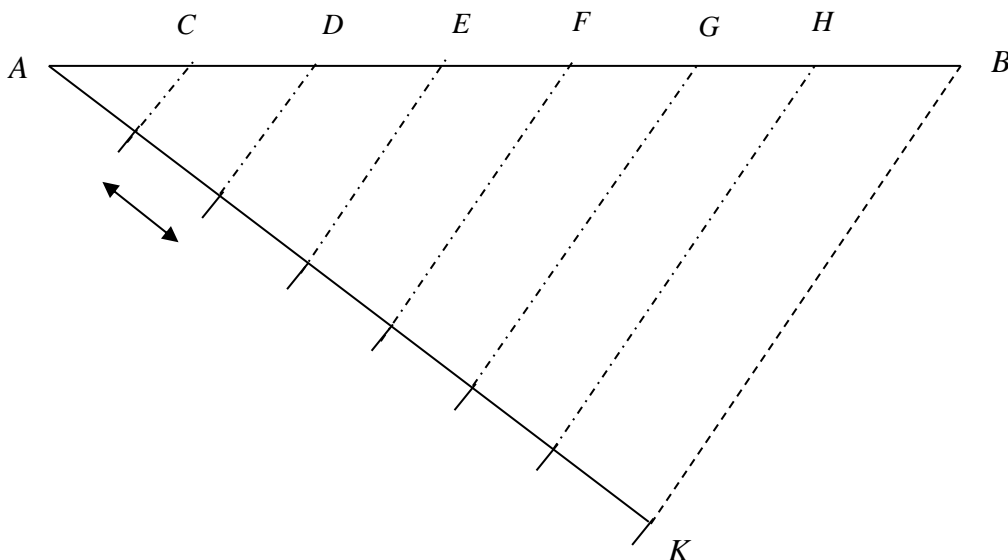
Si la escuela dispone de una escalera de aluminio con patas paralelas, entonces se podría hacer lo siguiente:

Trazar un rayo auxiliar que inicie en uno de los extremos del segmento \overline{AB} . En este rayo auxiliar, se marcan dividir en 7 partes iguales, a partir de A, tomando como medida el ancho de la escalera de aluminio.



O cualquier medida de que dispongas.

Sugerimos en particular el uso de la escalera de aluminio pues el siguiente paso es trazar una línea que una el último punto que se marcó en el segmento auxiliar, el punto K , con el punto B . Trazar ahora segmentos paralelos a \overline{BK} , desde los demás puntos que se encontraron, para obtener los puntos C, D, E, F, G y H , como se muestra en la figura siguiente:



Cada uno de los segmentos en que se divide el lado \overline{AB} es una séptima parte de él.



Sugerencia para quien imparte el curso

Recomendamos que el alumno realice la siguiente actividad en su cuaderno para comprobar dividir un segmento en 7 partes iguales o en otro número de partes y discutir con los alumnos cómo se conoce la razón en que un segmento será dividido.

1. Trazar un segmento \overline{AB} de cualquier magnitud. A éste lo vamos a dividir en 7 partes iguales.
2. Por el punto A trazar un rayo auxiliar, \overline{AK} , que forme cualquier ángulo con \overline{AB} y marca con ayuda de tu compás en él, 7 partes iguales.
3. Colocar la regla o escuadra para unir el punto K con el punto B .

4. Apoyar la regla o escuadra en otra escuadra para deslizarla y trazar líneas paralelas a \overline{KB} , desde cada punto marcado en \overline{AK} , para obtener los puntos C, D, E, F, G , y H .

5. Éstos son los puntos que dividen al segmento \overline{AB} en 7 partes iguales, verifica con tu compás que en efecto midan lo mismo.

Concepto clave 6.

La razón en la que un punto divide al segmento se obtiene al comparar, mediante un cociente, las longitudes de los dos segmentos en que queda dividido el segmento.

Por ejemplo, si comparamos las longitudes de \overline{AC} y \overline{CB} mediante un cociente, $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$ esto será igual a $\frac{1}{6}$

Porque la longitud de \overline{CB} es 6 veces la longitud de \overline{AC}

De modo similar el punto D divide al segmento \overline{AB} en la razón $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{2}{5}$, pues la longitud de \overline{DB} es 5 veces la longitud de \overline{AD} y la longitud de \overline{AD} es el doble de la de \overline{AC}

El punto E divide al segmento en la razón $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{3}{4}$, ¿estás de acuerdo?

¿Cuál sería la razón en que el punto F divide al segmento \overline{AB} ?

Finalmente el punto G divide al segmento en la razón $\frac{\overline{AG}}{\overline{GB}} = \frac{5}{2}$ y el punto H en la razón $\frac{6}{1}$.

Resumiendo, las razones en que los puntos C, D, E, F, G y H dividen al segmento son $\frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}$ y $\frac{6}{1}$.



Ejercicio 1

Expresar el número de puntos necesarios y las razones en que esos puntos dividen al segmento \overline{AB} si éste:

1. Se divide en 5 partes iguales.
2. Se divide en 2 partes iguales.
3. se divide en 4 partes iguales.
4. Se divide en 9 partes iguales.
5. Se divide en 3 partes iguales
6. ¿Qué sucede con la razón si invertimos numerador y denominador en las razones que habíamos encontrado?

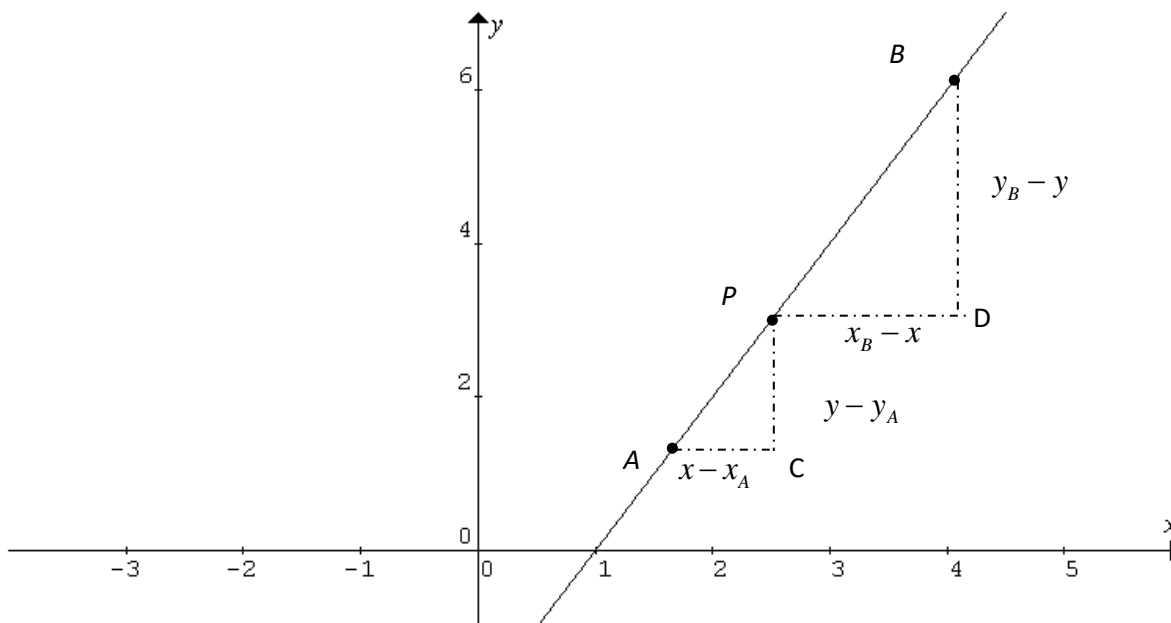
Explicar la respuesta.

7. Trazar en el cuaderno un segmento y dividirlo en 5 partes iguales ayudándose de regla y compás solamente.

Ya recordamos la construcción geométrica para dividir un segmento en partes iguales, ahora deduciremos una expresión para obtener las coordenadas de un punto $P(x, y)$ que divide a un segmento en una razón r conocida.

En la figura siguiente, considera el segmento formado por los puntos $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$ y supongamos que el punto $P(x, y)$ lo divide en la razón r .

Observa que al trazar líneas auxiliares paralelas al eje X desde A y P ; líneas auxiliares paralelas al eje Y desde P y B , se forman dos triángulos, el $\triangle ACP$ y el $\triangle PDB$ los cuales son semejantes.



Como P divide al segmento en la razón r , ésta se puede escribir como $r = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$

En la gráfica se han formado dos triángulos semejantes; recuerda que **si dos triángulos son semejantes, sus lados correspondientes son proporcionales** y entonces podemos establecer la siguiente proporción:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{x - x_A}{x_B - x} = \frac{y - y_A}{y_B - y} = r$$

Tomemos parte de la proporción, por ejemplo $\frac{x - x_A}{x_B - x} = r$.

Para despejar x de esta proporción, primero, multiplica toda la expresión por $x_B - x$

El resultado será $x - x_A = r(x_B - x) = rx_B - rx$

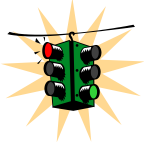
Agrupar los términos en x : $x + rx = rx_B + x_A = x_A + rx_B$

Factoriza x y despégala $x(1 + r) = x_A + rx_B$

Debe resultarte $x = \frac{x_A + rx_B}{1 + r}$

De modo similar se obtiene una expresión para y , $y = \frac{y_A + ry_B}{1+r}$

Concepto clave 7



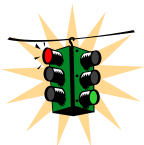
Coordenadas del punto que divide a un segmento en una razón dada.

Por consiguiente, las coordenadas del punto (x, y) que dividen al segmento en la

razón r son $x = \frac{x_A + rx_B}{1+r}$, $y = \frac{y_A + ry_B}{1+r}$

En particular, tomar en cuenta que si deseamos obtener **el punto medio**, la razón en que este punto divide al segmento es $r = 1$. Entonces las fórmulas para obtener las coordenadas del punto medio quedarán:

Concepto clave 8



Las coordenadas del punto medio de un segmento de recta formado por los puntos $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$ son $\bar{x} = \frac{x_A + x_B}{2}$, $\bar{y} = \frac{y_A + y_B}{2}$

Ejemplo 1



El problema de trisecar un segmento

Encuentra las coordenadas de los puntos que dividen en 3 partes iguales al segmento formado por los puntos $Q(-3,6)$ y $R(5, -1)$

Solución:

Ubica los puntos Q y R en un sistema cartesiano

Para uno de los puntos que buscamos, la razón en que divide al segmento es $\frac{1}{2}$, ¿estás de acuerdo?

Por lo tanto, sustituimos éste valor y las coordenadas de Q y R en las fórmulas que obtuvimos.

$$x = \frac{-3 + \left(\frac{1}{2}\right)(5)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{-3 + \frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}$$

$$y = \frac{6 + \left(\frac{1}{2}\right)(-1)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{6 - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{11}{3}$$

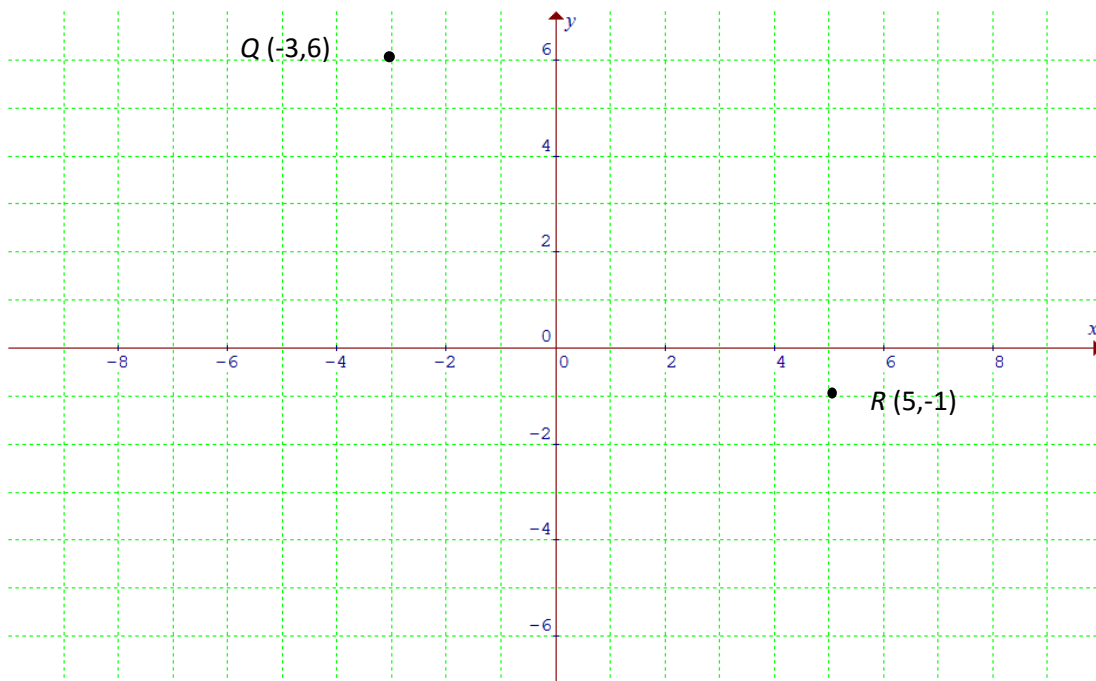
Localiza este punto $A\left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right)$ en la gráfica.

Para el otro punto, la razón en que divide al segmento es $\frac{2}{1} = 2$ ¿de acuerdo?

$$\text{Entonces } x = \frac{-3 + 2(5)}{1 + 2} = \frac{-3 + 10}{3} = \frac{7}{3}; \quad y = \frac{6 + 2(-1)}{1 + 2} = \frac{4}{3}$$

Localiza en la gráfica este punto $B\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$ y el anterior que obtuviste y verifica con un compás que efectivamente éste y el punto anterior dividen al segmento en 3 partes iguales.

En la siguiente gráfica se han ubicado los puntos Q y R

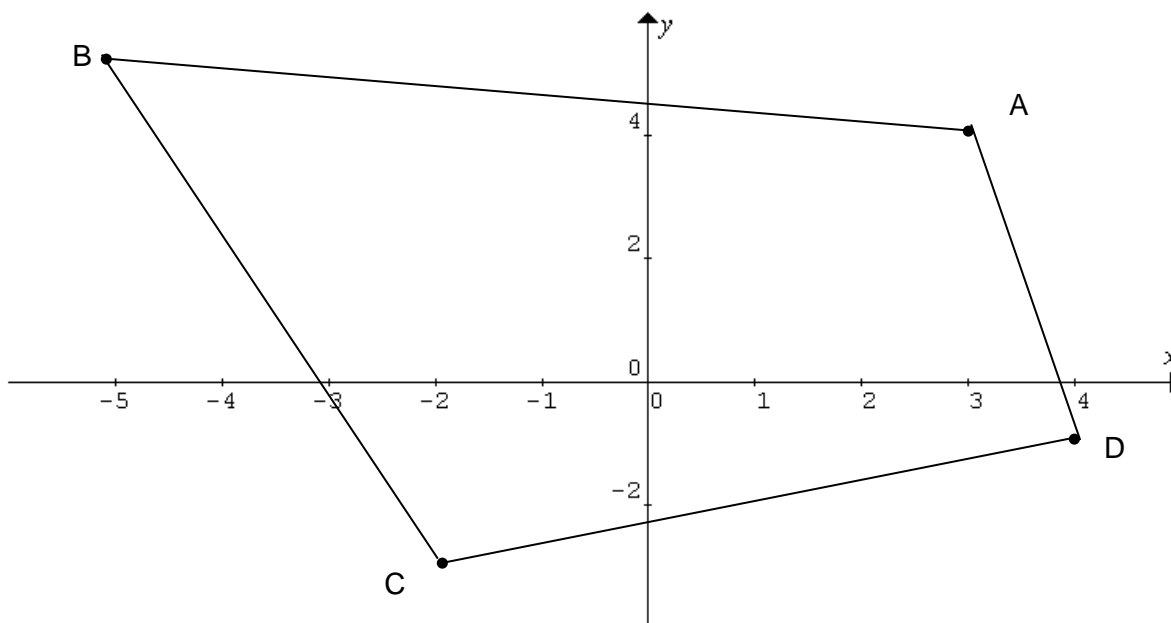


Ejemplo 2



El Problema del paralelogramo

Comprueba que los puntos medios del cuadrilátero formado por los puntos $A(3, 4)$, $B(-5, 5)$, $C(-2, -3)$ y $D(4, -1)$ forman un paralelogramo.



En tu cuaderno traza un sistema de coordenadas y ubica estos puntos.

Primeramente debemos encontrar los puntos medios de cada lado, completa

Para el lado AB , $\bar{x}_{AB} = \frac{3 + ()}{2} = \frac{-2}{2} = -1$, $\bar{y}_{AB} = \frac{4 + 5}{2} = \frac{9}{2}$ $E(-1, \frac{9}{2})$

Para el lado BC , $\bar{x}_{BC} = \frac{+(-2)}{2} = \frac{-7}{2} = -\frac{7}{2}$, $\bar{y}_{BC} = \frac{5 + (-3)}{2} = \frac{2}{2} = 1$; $F(-\frac{7}{2}, 1)$

Para el lado CD , $\bar{x}_{CD} = \frac{2}{2} = 1$, $\bar{y}_{CD} = \frac{-3 + ()}{2} = \frac{-4}{2} = -2$; $G(1, -2)$

Para el lado DA , $\bar{x}_{DA} = \frac{4 + }{2} = \frac{7}{2}$, $\bar{y}_{DA} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$; $H(\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$

Ahora localiza estos puntos en la gráfica.

Para comprobar que los puntos medios forman un paralelogramo debemos verificar que los lados opuestos son paralelos o que tienen la misma longitud.

NOTA: Aunque en este momento no justificamos lo siguiente, pues lo estudiarás en la unidad 3, lo utilizamos para dar solución al problema.

Dos segmentos son paralelos si sus pendientes son iguales

Calculemos las pendientes de \overline{EF} y \overline{GH} .

$$m_{EF} = \frac{1 - \frac{9}{2}}{-\frac{7}{2} - (-1)} = \frac{-\frac{7}{2}}{-\frac{7}{2} + 1} = \frac{-\frac{7}{2}}{-\frac{5}{2}} = \frac{7}{5}; \quad m_{GH} = \frac{\frac{3}{2} - (-2)}{\frac{7}{2} - 1} = \frac{\frac{3}{2} + 2}{\frac{5}{2}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{7}{5}$$

Como puedes ver tienen el mismo valor

Ahora, las pendientes de \overline{EH} y \overline{FG}

$$m_{EH} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{9}{2}}{\frac{7}{2} - (-1)} = \frac{-\frac{6}{2}}{\frac{9}{2}} = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}; \quad m_{FG} = \frac{-2 - 1}{1 - (-\frac{7}{2})} = \frac{-3}{\frac{9}{2}} = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$$

También son iguales!

Esto nos confirma que los puntos medios forman un paralelogramo pues los lados opuestos son paralelos ya que tienen la misma pendiente. También se puede verificar que forman un paralelogramo utilizando las longitudes de los lados



Ejercicio 2

1. Uno de los extremos de un segmento es el punto $A(7, 8)$ y su punto medio es $B(4,3)$ Hallar el otro extremo.
2. Los puntos $A(2,-2)$, $B(4,6)$, $C(-4, 3)$ y $D(-6, -5)$ son los vértices de un paralelogramo. Demostrar que sus diagonales se intersectan en el punto medio.
3. Determinar los puntos que dividen al segmento con extremos $A(6,4)$ y $B(-4,-3)$ en 5 partes iguales.
4. Encontrar las coordenadas del punto P que divide al segmento con extremos $A(1,2)$ y $B(15,9)$ en la razón $r = \frac{3}{4} = \frac{AP}{PB}$