Hoofdstuk I: veelterm(en)(functies)

www.karelappeltans.be

June 23, 2021

1 de rechte, veeltermfunctie van graad 1

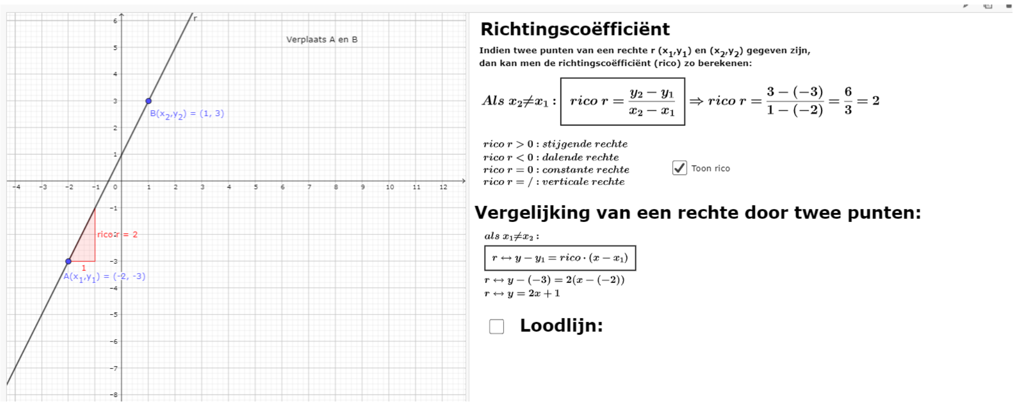


Figure 1: https://www.geogebra.org/m/V6dh2XPP

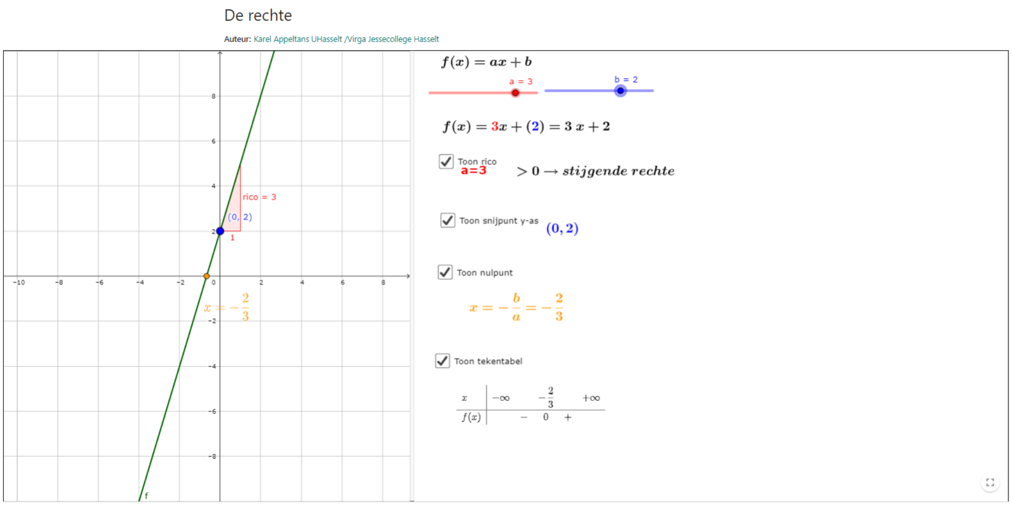


Figure 2: https://www.geogebra.org/m/TF8KaYf2

2 de parabool,veeltermfunctie van graad 2

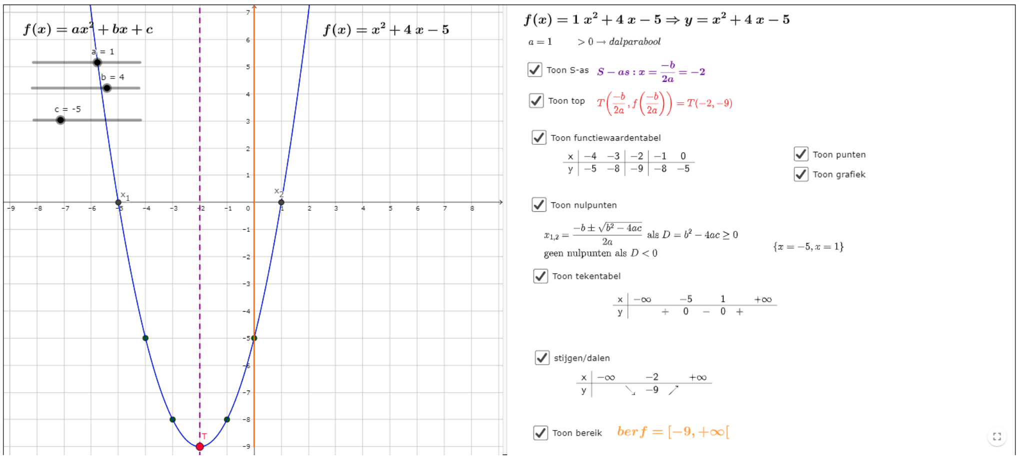


Figure 3: https://www.geogebra.org/m/uB6aYGJp

3 elementaire functie $f(x) = x^3$, veeltermfunctie van graad 3

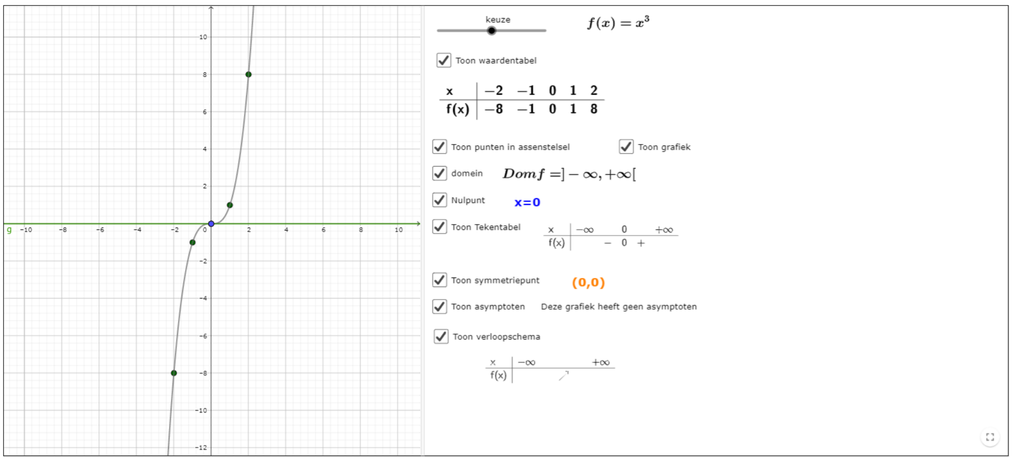


Figure 4: https://www.geogebra.org/m/pqvnzptk

4 ontbinding in factoren

Werkwijze

Bij ontbinding in factoren wil men een veelterm schrijven als product van meerdere factoren

stap 1: gemeenschappelijke factoren afzonderen

stap 2: bij tweede graad

stap 2a: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

stap 2b: merkwaardig product

stap 3: bij graad 3 en hoger: Horner

Probeer altijd elke term zover mogelijk te ontbinden!

Figure 5: https://www.geogebra.org/m/jnqy9wsd

stap 2a

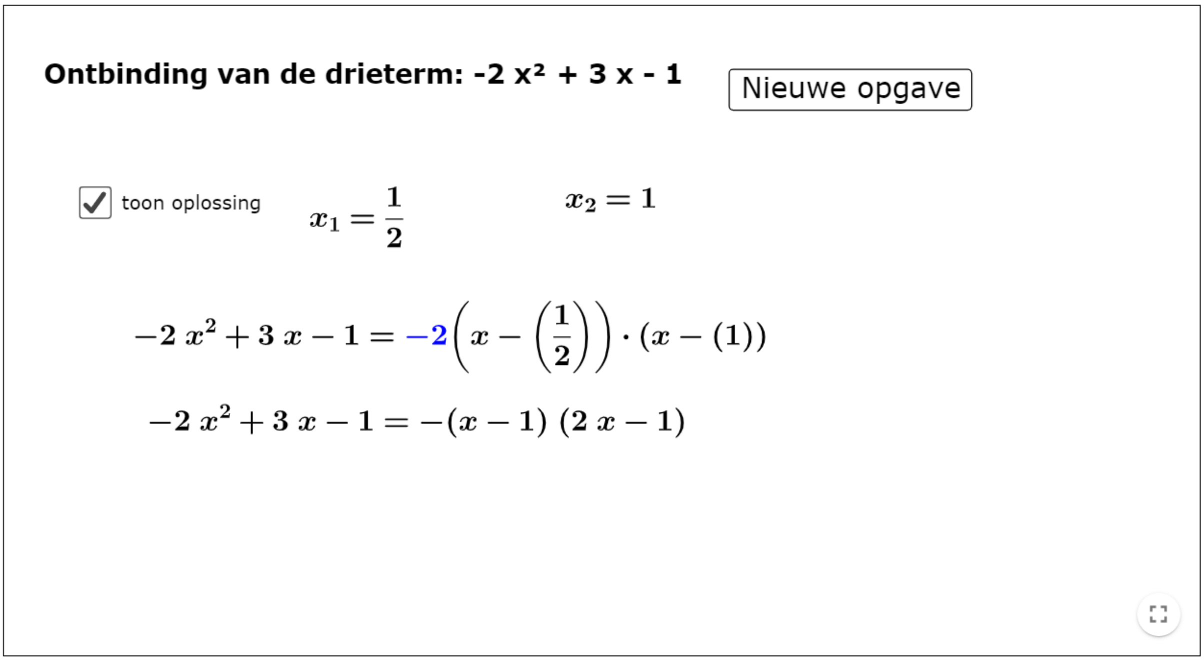


Figure 6: https://www.geogebra.org/m/jnqy9wsd

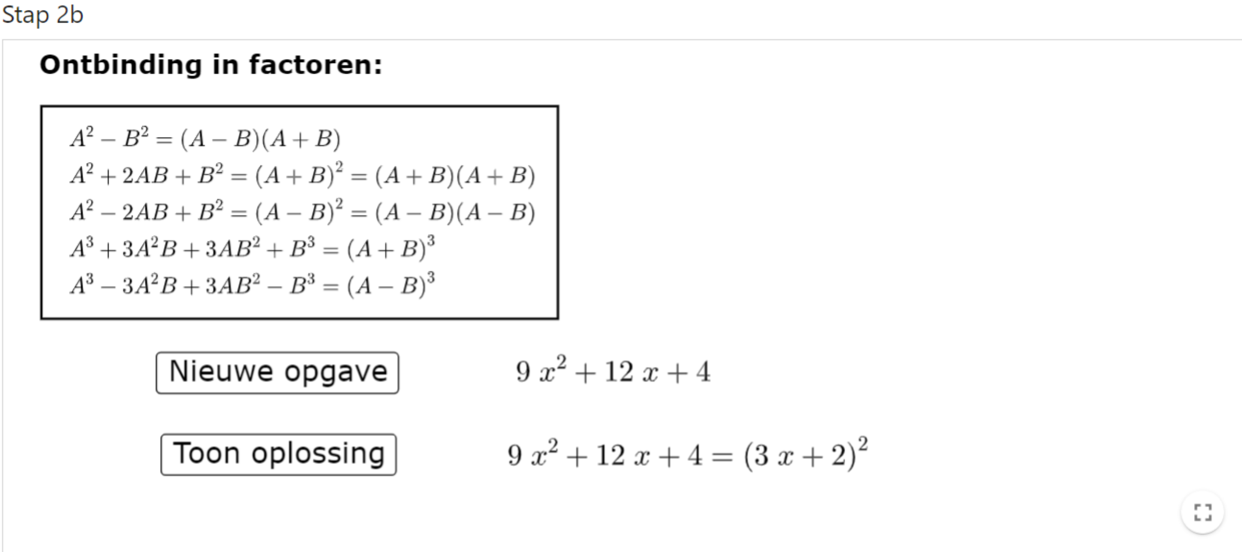


Figure 7: https://www.geogebra.org/m/jnqy9wsd

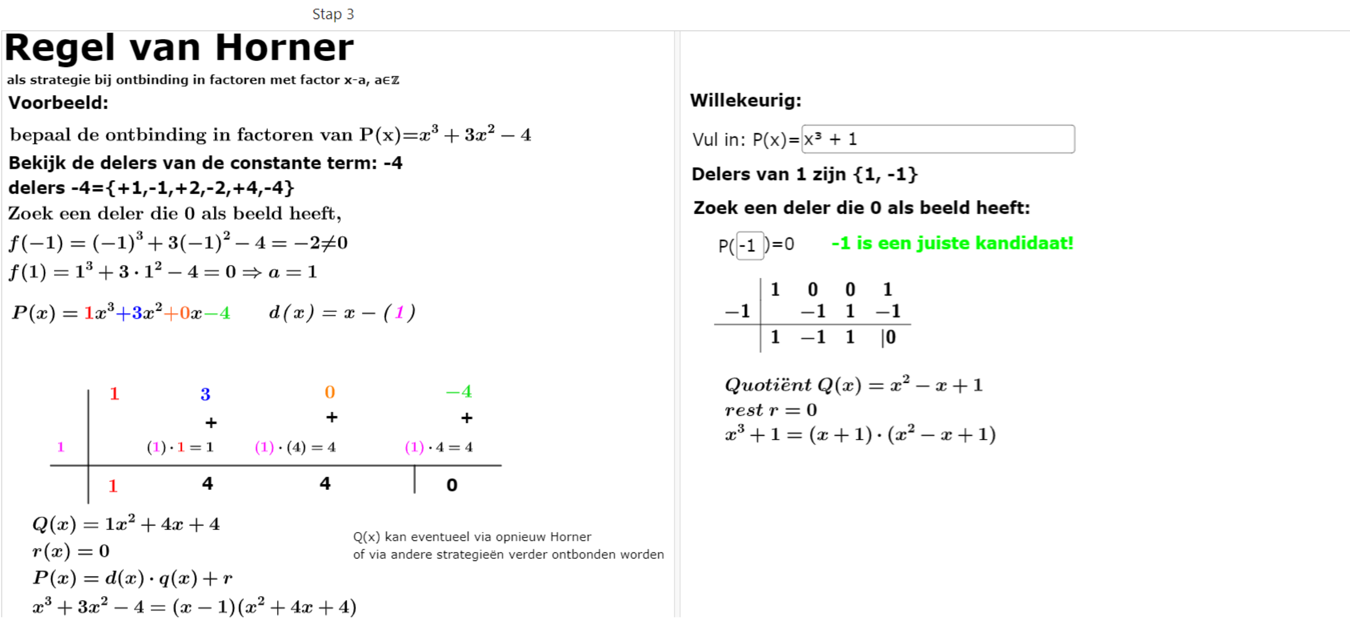


Figure 8: https://www.geogebra.org/m/jnqy9wsd

5 nulpunten

Stappenplan

stap 1: herschrijf de vergelijking naar ...=0
stap 2: een gemeenschappelijke factor eerst afzonderen
stap 3: als de onbekende slechts 1 keer voorkomt, moet men deze afzonderen
stap 4: als de graad van de onbekende 2 is, kan men
stap 4a: een merkwaardig product gebruiken:
stap 4b: de abc-formule gebruiken
stap 5: als de graad van de onbekende meer dan 2 is, kan men
stap 5a: een merkwaardig product gebruiken
stap 5b: het rekenschema van Horner gebruiken

Figure 9: https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf

stap 4b: de abc-formule

Nieuwe vergelijking

Toon exacte oplossing (als D>0, of D=0)

$$3x^2 - 15x - 15 = 0$$

Gebruik de abc-formule om de oplossingen van deze vierkantsvergelijkingen te bekomen. Vereenvoudig zo ver mogelijk

$$D = b^2 - 4ac$$

Als $D \geq 0$ dan $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Als $D < 0$ geen reële oplossingen

Je kan hiernaast jouw oplossingen achteraf controleren!

$$\frac{5 - 3\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{5 + 3\sqrt{5}}{2}$$

Figure 10: https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf

Nulpunten/oplossingen/wortels kwadratische vergelijking m.b.v. som en product van wortels

$Vb: los\ op: x^2 + 5x + 4 = 0$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

dit geeft hier: $s = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{1} = -5$

$$p = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4$$

Zoek twee getallen waarvan het product 4 is en de som -5 is

dit geeft :
$x_1 = -1$ *en* $x_2 = -4$
want $(-1) \cdot (-4) = 4$ *en* $(-1) + (-4) = -5$

Los op: $x^2 + 7x + 10 =$ nieuwe opgave

tip 1   tip 2

$p = \frac{c}{a} = 10,$ $(-2) \cdot (-5) = 10$ en $(-2) + (-5) = -7.$

$s = -\frac{b}{a} = -7.$

antwoord

$x_1 = -5 \quad \vee \quad x_2 = -2$

Figure 11: https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf

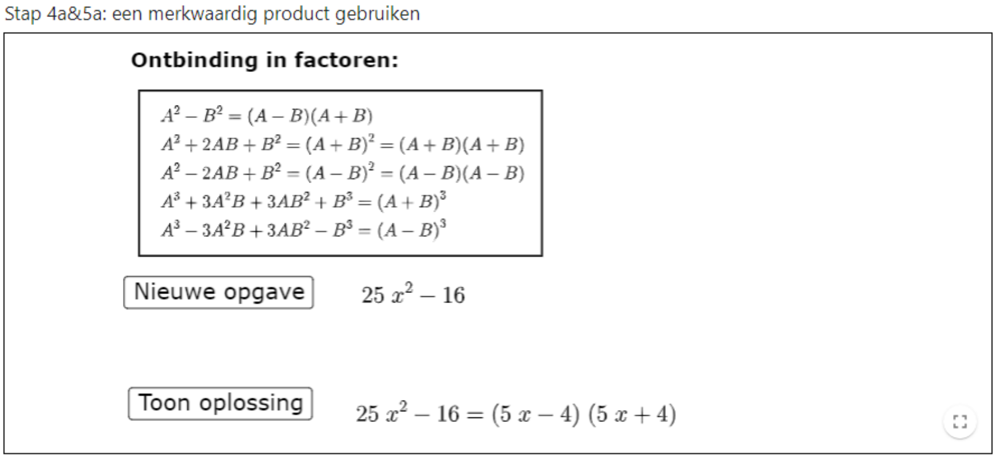


Figure 12: https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf

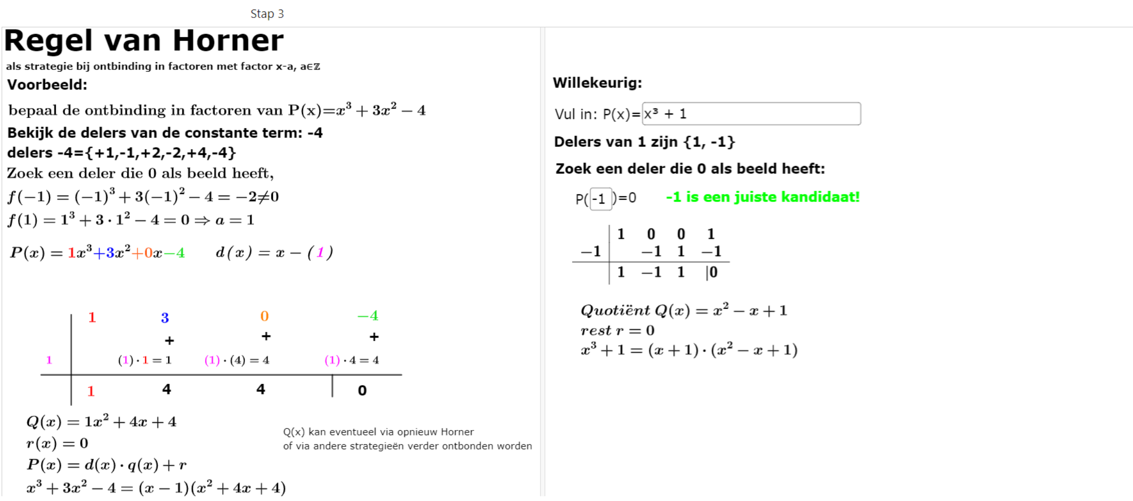


Figure 13: https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf

Voorbeelden:

$$x^2 + 5x + 7 = x + 3$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \text{ (stap 1)}$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \text{ (stap 4a)}$$
$$\Leftrightarrow (x+2)(x+2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -2\ (2\times)$$

$$4x^3 - 108 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^3 = \frac{108}{4} = 27$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+4x+4) = 0 \text{ via horner}$$
$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ of } x^2 + 4x + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ of } (x+2)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ of } x = -2 \text{ of } x = -2$$

$$(2-x)(1+x)^2 x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2 - x = 0\ of\ 1 + x = 0\ (2\times)\ of\ x = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 2\ of\ x = -1 (2\times)\ x = 0$$

$$12x^5 - 26x^4 + 2x^3 + 4x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x^2(6x^3 - 13x^2 + x + 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 = 0\ of\ 6x^3 - 13x^2 + x + 2 = 0$$
$$x^2 = \frac{0}{2} = 0!$$
$$x = \pm\sqrt{0} = 0 (2\times)$$
$$of\ (x-2)(6x^2 - x - 1) = 0 (via\ Horner)$$
$$x - 2 = 0\ of\ 6x^2 - x - 1 = 0$$
$$x = 2 \qquad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{12} = \begin{array}{l} \nearrow \frac{1}{2} \\ \searrow -\frac{1}{3} \end{array}$$

Figure 14: https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf

6 snijpunten zoeken

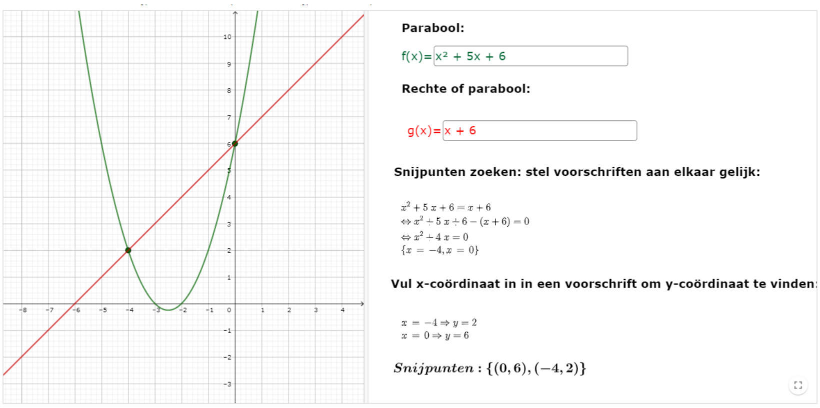


Figure 15: https://www.geogebra.org/m/nWmmAaSq

7 willekeurige veeltermfuncties

7.1 domein en gedrag bij de grenzen van het domein

Bij veeltermen altijd $dom f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} hoogste\ graadsterm$

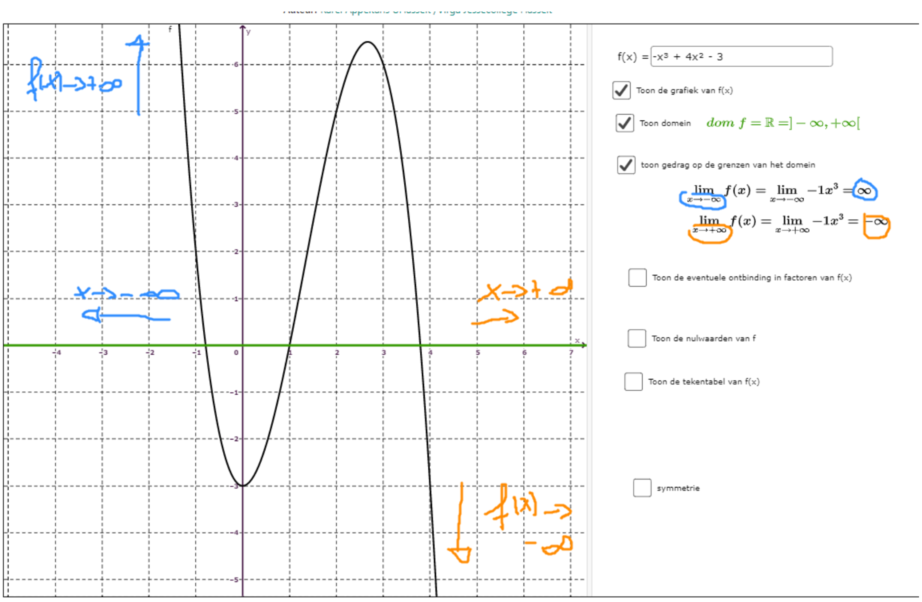


Figure 16: https://www.geogebra.org/m/uzmbrnee

7.2 tekentabel

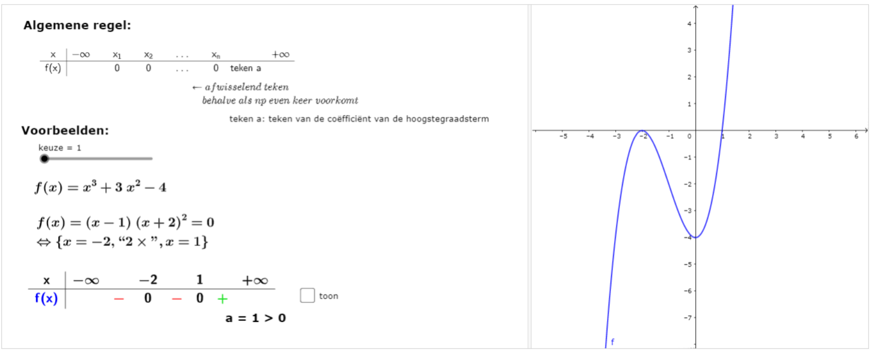


Figure 17: https://www.geogebra.org/m/jtap9fqz

7.3 ongelijkheden

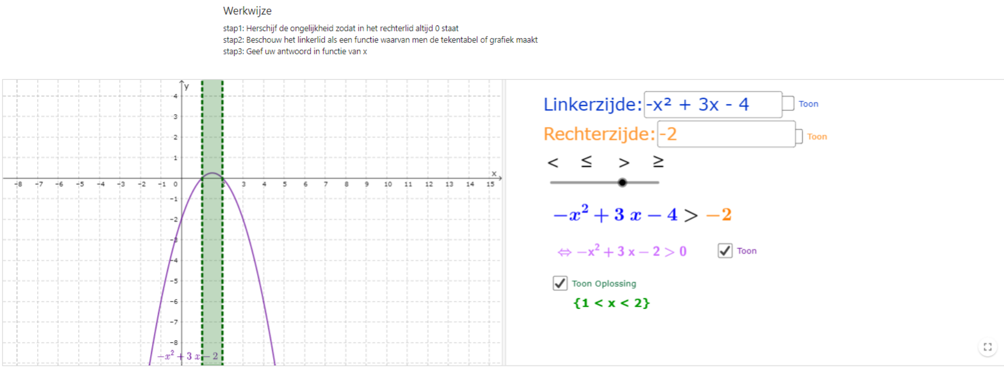


Figure 18: https://www.geogebra.org/m/dR7jSdkN

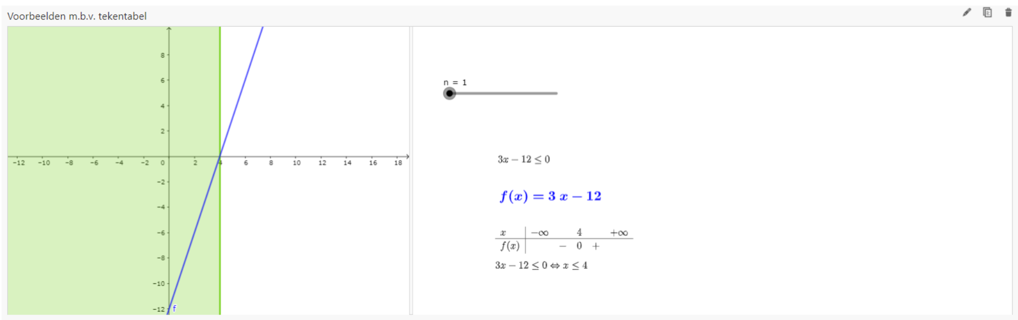


Figure 19: https://www.geogebra.org/m/dR7jSdkN

7.4 functievoorschriften opstellen

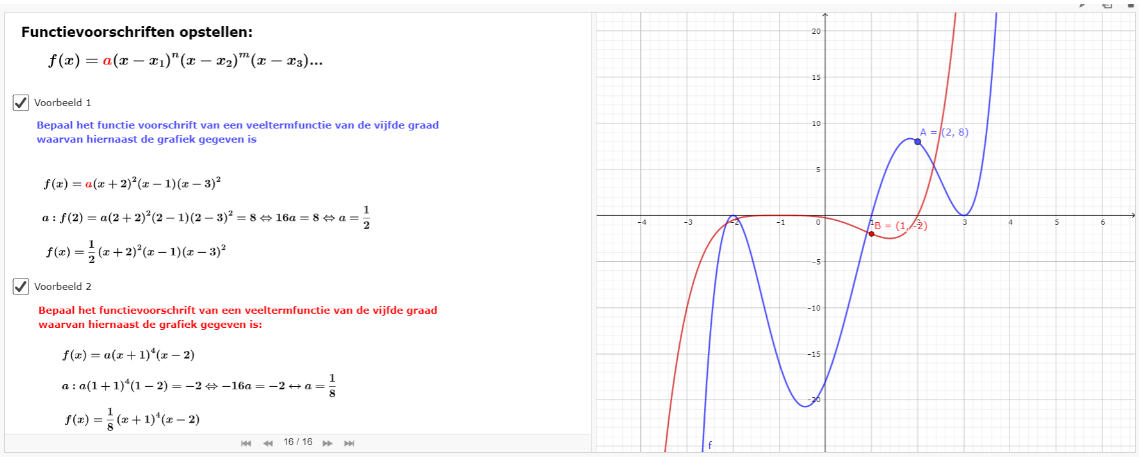


Figure 20: https://www.geogebra.org/m/uzmbrnee

7.5 symmetrie

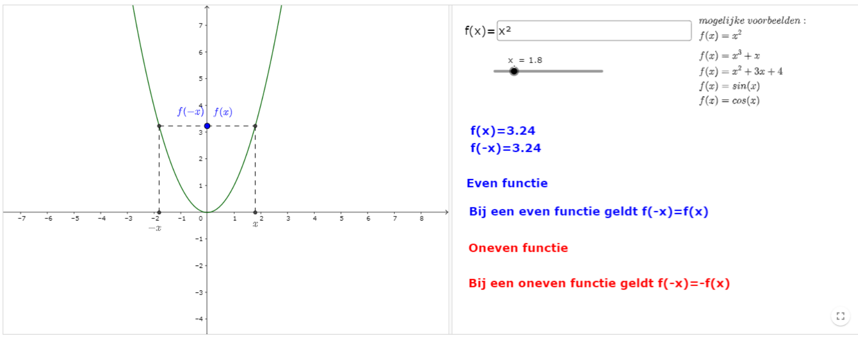


Figure 21: https://www.geogebra.org/m/kve5bgdv

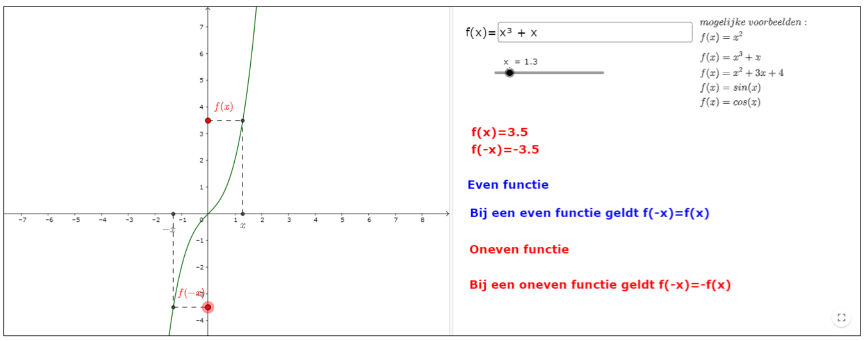


Figure 22: https://www.geogebra.org/m/kve5bgdv

8 Toepassingen

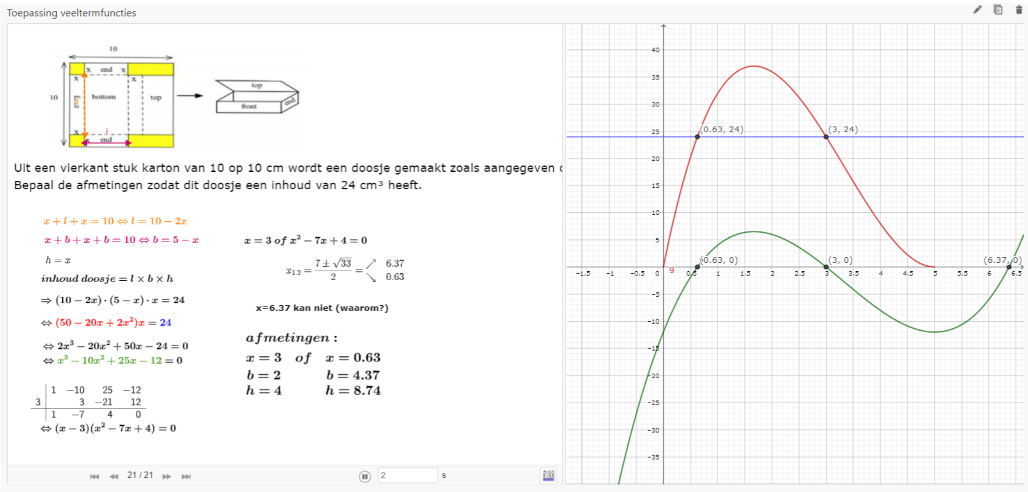


Figure 23: https://www.geogebra.org/m/uzmbrnee

9 Transformaties

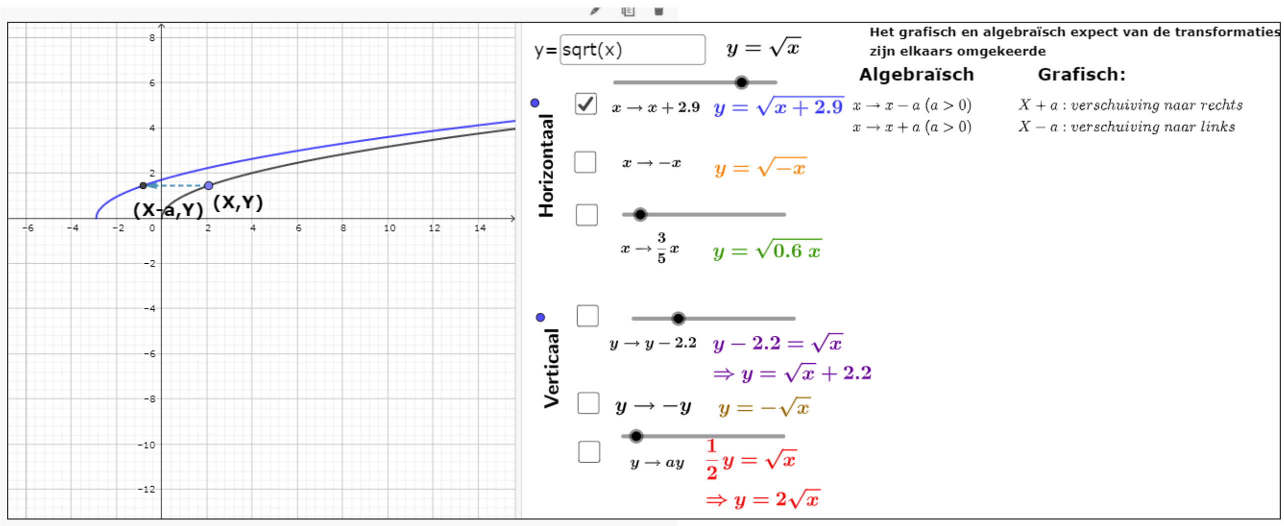


Figure 24: https://www.geogebra.org/m/mq5zhh8t

Overzicht

Horizontaal

Verschuiving: vervang "x" door "(x-c)" ; $c > 0$ verschuiving naar rechts, $c < 0$ naar links.
Spiegeling om de y-as: vervang "x" door "-x"
Uitrekking/inkrimping met factor $\frac{1}{b}$: vervang "x" door "(bx)"

Verticaal

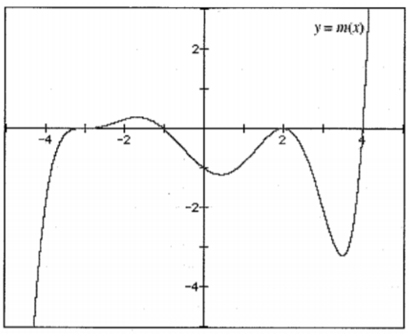
Verschuiving: vervang "y" door "(y-d)"; $d > 0$ naar boven, $d < 0$ naar beneden.
Spiegeling om de x-as: vervang "y" door "-y"
Uitrekking/inkrimping met factor a: vervang "y" door "$\frac{y}{a}$"

10 Algemene notatie

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

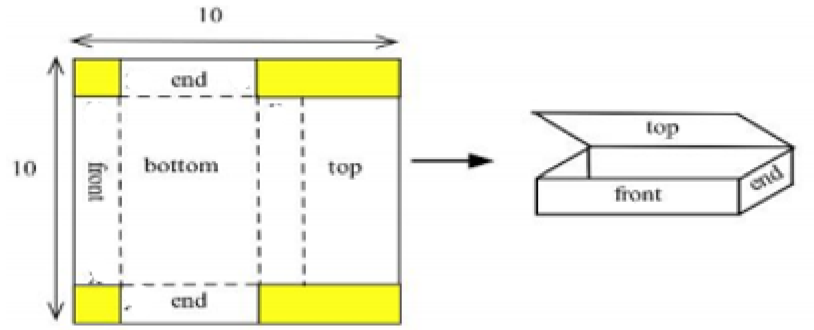
11 Oefeningen

1. Bepaal de vergelijking van de rechte die
   (a) door het punt (-4,3) gaat en parallel ligt aan de lijn $x + 4y = 6$.
   (b) door het punt (3,3) gaat en loodrecht staat op de lijn $x - 3y = 10$.
2. de functie $y = f(x) = -x^2 + px - 5$ heeft een maximum voor $x = 1$. Bereken p en de maximale functiewaarde
3. De functie $y = f(x) = px^2 + 4x + p$ heeft een maximum. De maximale functiewaarde is 3. Bereken p.
4. Ontbind in factoren
   (a) $49 - x^2$
   (b) $5x^3 - 4x^2 - 8x + 7$
   (c) $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$
   (d) $x^3 - 6x^2 + 9x$
5. Los op
   (a) $4(x - 2) = 3x - 7(2x - 3)$
   (b) $2(x - 3) + x < 5(x - 1) + 2$
   (c) $-9x^2 + 12x - 4 = 0$
   (d) $x^2 - 5x + 6 = 0$
   (e) $2x^2 - 7x + 6 = 0$
   (f) $2x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 28x - 12 = 0$
   (g) $x^4 - 1 = 0$
   (h) $4x^2 + 2x \leq 20$
   (i) $(x - 3)^2 + (x - 1)^2 = 2$
   (j) $(3x - 2)^2 - 5(3x - 2) - 14 = 0$
   (k) $(x^2 + 5x + 6)(2x - 1) < 0$
6. Bepaal de snijpunten van de grafieken van $y = x^2 - 2x$ en $y = 6 - x$
7. Bepaal het voorschrift van een veeltermfunctie $m(x)$ van de zevende graad, waarvan de grafiek gegeven is.



8. Bepaal alle intervallen waar $f(x) = (x - 2)^{2021} \cdot (x - 1)^{2022} \cdot (x + 1)^{2023} \cdot (x + 2)^{2024}$ positief is

9. Een fabrikant van dozen kan uit een stuk karton van 10 op 10 cm volgend doosje maken:



   (a) Bepaal een voorschrift voor de inhoud van deze doos.
   (b) Bepaal de afmetingen voor die doos met een inhoud van $8cm^3$.

10. Een goudsmid vervaardigt een rechthoekig kadertje waarvan twee overstaande zijden gouden staafjes zijn van 100 euro per cm lengte en de twee andere, zilveren staafjes van 75 euro per cm lengte. Bepaal de afmetingen voor een kadertje met een oppervlakte van 12 cm^2 als je 1500 euro wil spenderen.

11. Een open doos met een vierkant als grondvlak wordt gemaakt uit 9 m^2 materiaal. Bepaal de afmetingen voor een doos met een inhoud van 2 m^3

12. Gegeven de veeltermfunctie $f : x \mapsto x^3 + (1 - k^2)x + k$ met $k \in \mathbb{R}$

   (a) Toon aan dat $-k$ een wortel is.
   (b) Bepaal de twee andere wortels
   (c) Bepaal de waarden van k waarvoor de grafiek van f slechts één reële wortel heeft

13. Bepaal het functievoorschrift van de grafiek die men bekomt door de grafiek van $y = x^2$ achtereenvolgens 3 eenheden naar boven te verschuiven, 2 eenheden naar links, te spiegelen om de y-as en tenslotte te spiegelen om de x-as

14. De grafiek van $y = x^3$ wordt achtereenvolgens 1 eenheid naar beneden verschoven, dan uitgerokken met een factor 3, dan gespiegeld om de x-as en tenslotte 2 eenheden naar rechts verschoven. Geef het nieuwe voorschrift.

15. Bepaal de transformaties die men uitgevoerd heeft op $y = \sqrt{x}$ om $y = 2\sqrt{-x+3}-4$ te bekomen.

16. oefeningen handboek

12 taak