

Afgeleide functie van een functie

6) Afgeleide functie van een functie

We beschouwen de functie f met $f(x) = \frac{x^3}{3}$

We berekenen nu, steunend op de definitie van afgeleide in een punt, de volgende uitdrukkingen.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} - 0}{x - 0} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}}{x - 1} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}}{x - 2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = \frac{1}{3} \cdot (4 + 4 + 4) = 4 \end{aligned}$$

$$f'(5) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{125}{3}}{x - 5} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 5^3}{x - 5} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 5} (x^2 + 5x + 25) = \frac{1}{3} \cdot (25 + 25 + 25) = 25$$

Overzichtstabel:

x	$f'(x)$
0	$0 = 0^2$
1	$1 = 1^2$
2	$4 = 2^2$
5	$25 = 5^2$
...	...

We kunnen vermoeden dat $f'(a) = a^2$