Calcolo delle derivate elementari

Calcoliamo le derivate delle seguenti funzioni applicando la definizione di derivata, ovvero sostituendo l'espressione della funzione nel rapporto incrementale e calcolando il limite.

1. y=k (funzione costante)

In questo caso la funzione f vale sempre k, qualsiasi sia il punto x in cui la calcoliamo. Abbiamo quindi:

$$y'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = \mathbf{0}$$

Infatti nella funzione costante la y non cambia mai, cioè ha velocità 0 in ogni suo punto.

2. y=mx (caso particolare di funzione lineare, cioè di retta)

$$y'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{m\cdot(x+h) - m\cdot x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{m\cdot h}{h} = \lim_{h\to 0} m = \boldsymbol{m}$$

Abbiamo considerato l'espressione della funzione, sostituendovi ogni volta il valore corretto della x considerata. Il risultato è una costante: in una retta le y variano in modo costante rispetto alle x, con "velocità" pari al coefficiente angolare della retta stessa. Dal punto di vista grafico: se cerchiamo di disegnare la tangente in qualsiasi punto, otteniamo la retta di partenza.

Un caso particolare di questo esempio è la funzione $y = x$, che come derivata avrà $y' = 1$.

3. y=x^2 (caso particolare di funzione quadratica, cioè parabola)

Abbiamo $y = f(x) = x^2$. Sostituiamo questa espressione nella definizione

$$y'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - (x)^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} + h^2 + 2xh - \cancel{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(h+2x)}{h} = \lim_{h\to 0} (h+2x) = \mathbf{2x}$$

4. y=x^3 (caso particolare di cubica)

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - (x)^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^3} + h^3 + 3x^2h + 3xh^2 - \cancel{x^3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(h^2 + 3x^2 + 3xh)}{\cancel{h}} = \mathbf{3x^2}$$

5. y=x^n (una potenza qualsiasi di x)

1) In generale, osservando come si sviluppa $(a+b)^n$ ed usandolo per $(x+\Delta x)$, si dimostra che vale la seguente legge per ottenere le derivate delle potenze:

$$\boldsymbol{\frac{dx^n}{dx} = n \cdot x^{n-1}}$$

La dimostrazione, non semplicissima, è riportata nel riquadro blu per chi volesse provare ad usare la propria testa per capire la logica che vi è sotto.

Quando calcoliamo la potenza di binomio $(x + \Delta x)^n$ succede sempre che

1. x^n si elimina sempre con il corrispondente termine blu;
2. di tutti gli altri termini sopravvive solo quello che ha h elevato alla prima (poi h viene raccolto e si semplifica con il denominatore). Gli altri termini vanno tutti a 0 perché hanno "troppi" h.

Osservando gli esempi 3 e 4 si vede che funziona effettivamente così.

Per trovare questo contributo con h alla prima, basta porsi due domande. 1) moltiplicando $(x + h)$ per se stesso n volte, quando ottengo termini dove h sia alla prima? →Scegliendo la x in ognuno degli n binomi che moltiplico ***meno uno***, in cui invece prendo h. Quindi moltiplico 1 volta h e n-1 volte x, ottenendo $x^{n-1}h^1$.

$(x + h)^n = (x + h)(x + h)(x + h)(x + h)$ … [n volte]

Figura 1: Alcuni esempi dei prodotti che genereranno un contributo del tipo $h \cdot x^{n-1}$, perché ogni volta moltiplico un h e n-1 volte x.

2) In quanti modi posso ottenere questo prodotto (cioè quanti contributi di questo tipo ottengo?) →n modi: scegliendo il h solo nel primo binomio, poi solo nel secondo, e così via fino all'ennesimo. Quindi in totale ho $x^{n-1}h + x^{n-1}h + x^{n-1}h + \cdots n\ volte = nx^{n-1}h$. Come detto il h si semplifica con il denominatore, e rimane la derivata: nx^{n-1}.

6. y=a^x (funzione esponenziale)

Consideriamo un calcolo più complesso. Sostituiamo e raccogliamo utilizzando le proprietà delle potenze:

$$y'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{(x+h)} - a^{(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h}$$

portiamo a^x fuori dal limite perché è una costante rispetto ad h (non dipende dal limite)

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{(a^h - 1)}{h}$$

Ora introduciamo una nuova variabile $Z = a^h - 1$; come in ogni sostituzione dobbiamo

1) trovare a cosa tende la nuova variabile, per rispondere a questa domanda: <u>quando la vecchia variabile h tende a 0 (limite originale) a cosa tende la nuova variabile Z</u>?

   $\lim_{h\to 0} Z = \lim_{h\to 0}(a^h - 1) = 0$; quindi quando $h \to 0$ anche $Z \to 0$

2) ricavare la vecchia variabile in funzione della nuova, per rispondere a questa domanda: <u>cosa devo mettere nel limite al posto della vecchia variabile h</u>?

   $$Z = a^h - 1 \quad \to \quad a^h = Z + 1 \quad \to \quad h = \log_a(Z + 1)$$

Armati di questi elementi, sostituiamoli nell'espressione e procediamo:

Stiamo cercando di ottenere uno dei limiti notevoli. Usiamo la proprietà dei logaritmi ed otteniamo:

$$a^x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{(a^h-1)}{h} \to a^x \cdot \lim_{Z\to 0}\frac{Z}{\log_a(Z+1)} = a^x \cdot \lim_{Z\to 0}\frac{1}{\boxed{\frac{1}{Z}}\log_a(Z+1)}$$

$$= a^x \cdot \lim_{Z\to 0}\frac{1}{\log_a(Z+1)^{\frac{1}{Z}}}$$

Proprietà dei logaritmi!

Stiamo cercando di ottenere il limite notevole $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$; ci siamo quasi riusciti, anche se non nella forma esatta con cui viene presentato di solito. Per esercizio facciamo una nuova sostituzione fino ad arrivare al limite "conosciuto". Sostituiamo $K = \frac{1}{Z}$ e rispondiamo alle due domande chiave; troviamo:

1. $\lim_{Z\to 0} K = \lim_{Z\to 0}\frac{1}{Z} = \infty$
2. $Z = \frac{1}{K}$

$$a^x \cdot \lim_{Z\to 0}\frac{1}{\log_a(1+Z)^{\frac{1}{Z}}} \to a^x \cdot \lim_{K\to\infty}\frac{1}{\log_a\boxed{\left(1+\frac{1}{K}\right)^K}} = a^x \cdot \frac{1}{\log_a e}$$

Limite notevole!

Passando a base e per il logaritmo otteniamo $\log_a e = \frac{\log_e e}{\log_e a} = \frac{1}{\log_e a}$; quindi il nostro limite diventa $\log_e a \cdot a^x = \ln a \cdot a^x$

$$\frac{\mathbf{d}a^x}{\mathbf{dx}} = \ln a \cdot a^x$$

Che, nel caso in cui $a = e$, dà una derivata molto semplice: $\frac{\partial e^x}{\partial x} = e^x$

7. $y = \log_a x$ (funzione logaritmica)

Proprietà dei logaritmi!

Ho distribuito la divisione

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\boxed{\frac{1}{h}}\cdot\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

Proprietà dei logaritmi!

Sostituiamo $y = \frac{x}{h}$; 1) $\lim_{h\to 0} y = \lim_{h\to 0}\frac{x}{h} = \infty$; 2) $h = \frac{x}{y}$

Proprietà delle potenze!

$$\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \to \lim_{y\to\infty}\log_a\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{y}{x}} = \lim_{y\to\infty}\log_a\left[\boxed{\left(1+\frac{1}{y}\right)^y}\right]^{\frac{1}{x}} = \log_a e^{\frac{1}{x}}$$

Limite notevole!

Proprietà dei logaritmi!

$$= \log_a e^{\boxed{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{x}\cdot\log_a e \to \frac{\mathbf{d}\,\log_a x}{\mathbf{dx}} = \frac{1}{x}\log_a e$$

Anche in questo caso se $a = e$ la derivata diventa più semplice

$$\frac{d\,\mathbf{\ln x}}{dx} = \mathbf{\frac{1}{x}}$$

8. Tabella riassuntiva delle derivate elementari

Funzione costante	$\frac{dk}{dx} = 0$
Potenze di x (incluse negative e/o frazionarie – radici)	$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$
Funzione esponenziale a base e	$\frac{de^x}{dx} = e^x$
Funzione esponenziale generica	$\frac{da^x}{dx} = \ln a \cdot a^x$
Funzione logaritmica a base e	$\frac{\mathrm{d}\, ln\, x}{\mathrm{dx}} = \frac{1}{x}$
Funzione logaritmica generica	$\frac{\mathrm{d}\, log_a\, x}{\mathrm{dx}} = \frac{1}{x\ \ln a}$
Funzioni seno e coseno	$\frac{\mathrm{d}\, sin\, x}{\mathrm{dx}} = \cos x\,;\ \frac{\mathrm{d}\, cos\, x}{\mathrm{dx}} = -\sin x$
Funzione tangente*	$\frac{\mathrm{d}\, tan\, x}{\mathrm{dx}} = 1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

* La tangente NON è una derivata elementare, dato che la ricaveremo come derivata del rapporto tra seno e coseno. La riportiamo qui in quanto è comunque una formula di riferimento che è importante tenere presente.