Auf der Kirmes können Sie an einer Losbude für 10€ 20 Lose ziehen.

In der Lostrommel befinden sich insgesamt 1000 Lose.

500 Lose sind Nieten.

Mit 400 Losen erhalten Sie einen Trostpreis im Wert von 0.50 €

90 Lose liefern einen Gewinn in Höhe von 2€

10 Lose liefern einen Hauptpreis.

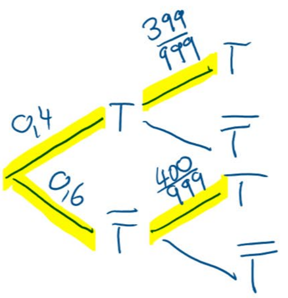
Ereignisse: Trost, Gewinn, Hauptgewinn

a) *Berechnen Sie für das erste und das zweite gezogene Los jeweils die Wahrscheinlichkeit für einen Trostpreis.*

Für das erste gezogene Los beträgt die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{400}{1000} = 0{,}4 = 40\%$$

Für das zweite gezogene Los hängt die Wahrscheinlichkeit vom ersten gezogenen Los ab:



$$P = 0{,}4 \cdot \frac{399}{999} + 0{,}6 \cdot \frac{400}{999}$$

$$\approx 0{,}4 = 40\%$$

16	4/10*399/999
	≈ 0.1597597597598
17	6/10*400/999
	→ $\frac{80}{333}$
18	$16 + $17
	→ $\frac{666000000000067}{1665000000000000}$
19	$18
	≈ 0.4

Trotzdem ist die berechnete Wahrscheinlichkeit kaum von 0,4=40% zu unterscheiden.

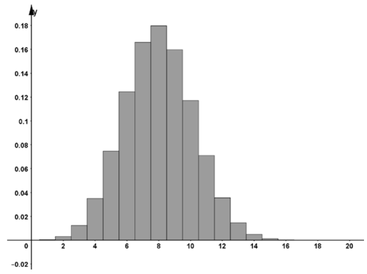
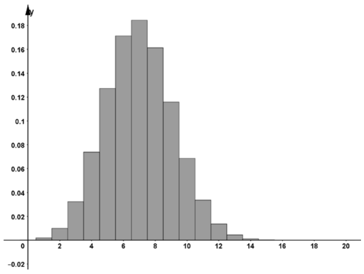
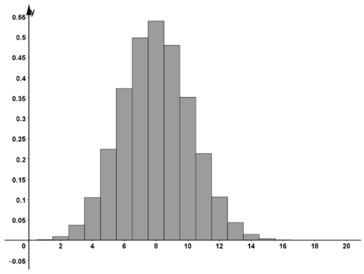
b) *Begründen Sie, dass man das Ziehen der 20 Lose näherungsweise als Bernoulliexperiment modellieren darf.*

Wie man in a) gesehen hat, verändert sich die Wahrscheinlichkeit vom ersten zum zweiten Los kaum. Wenn die Anzahl der Züge viel geringer als die Anzahl der zu ziehenden Lose ist, dann darf man die Wahrscheinlichkeit als konstant annehmen.

Bei einer Bernoullikette muss die Wahrscheinlichkeit p für jeden Zug immer gleich sein und es darf nur zwei mögliche Ergebnisse geben. Wenn man sich nur für Trostpreis oder Nicht-Trostpreis interessiert, sind die Bedingungen näherungsweise gegeben.

Ähnlich ist es bei Umfragen, bei denen aus einer großen Zahl von Menschen nur ein kleiner Anteil befragt wird.

c) Die Zufallsvariable T ordnet jedem Ergebnis des 20-fachen Ziehens von Losen die Anzahl der gezogenen Trostpreise zu.
Ein der folgenden Grafiken zeigt die Verteilung von $P(T=k)$ für $0 \leq k \leq 20$.
<u>Entscheiden Sie</u> sich <u>begründet</u> für die richtige Grafik.

Eine Binomialverteilung hat ihren höchsten Wert beim Erwartungswert.

$$E(T) = p \cdot n = 0.4 \cdot 20 = 8$$

Nur die erste und die letzte Verteilung haben den größten Wert bei 8.
Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten muss 1 ergeben. Das ist bei der letzten Verteilung nicht der Fall.
Deshalb muss die linke Verteilung richtig sein.

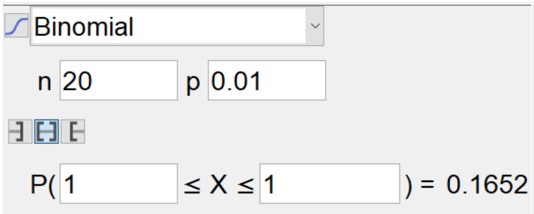
d) Die Zufallsvariable H ordnet jedem Ergebnis des 20-fachen Ziehens von Losen die Anzahl der gezogenen Hauptpreise zu.
<u>Berechnen Sie</u>

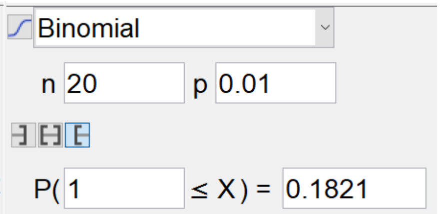
$$P(H=1)$$

und

$$P(H \geq 1)$$

und <u>interpretieren Sie</u> die Ergebnisse im Sachkontext.





$$P(H=1) \approx 0{,}1652, P(H \geq 1) \approx 0{,}1821$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 16,5% zieht man genau einen Hauptpreis und mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 18,2% zieht man mindestens einen Hauptpreis.

e) Der Losverkäufer hat die folgende Gleichung gelöst:

$$500 \cdot 0{,}5 + 400 \cdot 0 + 90 \cdot (-1{,}5) + 10 \cdot (0.5 - x) = 250$$

Daraufhin entscheidet er sich, für den Hauptpreis 14€ auszugeben.
<u>Interpretieren Sie</u> die Rechnung im Sachkontext.
Der Losverkäufer hat den Erwartungswert für seinen Gewinn auf 250€ festgelegt und dann berechnet, wie hoch der Hauptgewinn sein muss.
Bei jeder der 500 Nieten macht er 0,5€ Gewinn, bei jedem Trostpreis macht er weder Verlust noch Gewinn. Bei den 90 Gewinnen von 2€ macht er 1,5€ Verlust und bei den 10 Hauptgewinnen von x€ ist der Verlust 0,5€-x€. Löst man die Gleichung, so erhält man $x = 14$.

f) Sie möchten gern den Hauptgewinn ziehen.

(1) *<u>Erläutern Sie</u>, wie Sie rechnerisch bestimmen, wie viele Lose Sie ziehen müssen, damit Sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90%, mindestens 1 Hauptgewinn ziehen.*

Es wird die Anzahl der Versuchte gesucht, so dass

$$P(H \geq 1) \geq 0{,}9$$

Deshalb berechnet man $P(H \geq 1)$ für verschiedene Werte von n im Wahrscheinlichkeitsrechner den Wert von $P(H \geq 1)$. Man probiert systematisch Werte für n aus, indem man einen Wert n_1 bestimmt, für den $P(H \geq 1)$ zu klein ist und einen Wert n_2, für den $P(H \geq 1)$ zu groß ist. Dann berechnet man $P(H \geq 1)$ für den Wert n_3 in der Mitte zwischen n_1 und n_2. Man setzt das Verfahren fort, bis man zwei aufeinanderfolgende Werte kennt, bei denen der Wert 0,9 gerade übersprungen wird.

(2) Im Modell der Binomialverteilung berechnet man, dass man mindestens 230 Lose ziehen muss, berücksichtigt man aber, dass man die Lose nicht zurücklegt, so findet man heraus, dass man nur 205 Lose kaufen muss.

<u>Begründen Sie</u>, warum die Binomialverteilung den Sachkontext bei dieser Berechnung nicht mehr so gut modelliert.

Die Binomialverteilung kann man nur als näherungsweises Modell verwenden, wenn die Anzahl der Versuche viele kleiner als die Anzahl der zu ziehenden Lose ist. Das ist hier aber nicht mehr der Fall.

(3)

begründen	Sachverhalte auf Gesetzmäßigkeiten bzw. kausale Zusammenhänge zurückführen (hierbei sind Regeln und mathematische Beziehungen zu nutzen)	II

berechnen	Ergebnisse mit Darstellung von Ansatz und Berechnung gewinnen	I–II, vorw. I

bestimmen, ermitteln	Zusammenhänge bzw. Lösungswege aufzeigen, das Vorgehen darstellen und die Ergebnisse formulieren	II

„Bestimmen Sie rechnerisch“:
Zusätzlich werden Ansatz und Berechnung dargestellt. Dabei sind weitere Lösungsschritte zu dokumentieren.
Eine Argumentation, die sich auf das Ablesen von Werten und Zusammenhänge am Funktionsgraphen oder auf die Verwendung von Rechnerfunktionen zur Analyse einer Funktion stützt (z.B. Angabe von Maxima), erfüllt nicht die Erwartungen.

Das bedeutet für Sie, dass Sie bei der Lösung der Aufgabe Geogebra verwenden dürfen, aber die dargestellte Rechnung muss vollständig nachvollziehbar sein.

entscheiden	sich bei Alternativen eindeutig auf eine Möglichkeit festlegen, eine Begründung ist nicht erforderlich (sofern sie nicht durch einen ergänzenden Operator gefordert wird)	I–II, vorw. II

„Entscheiden Sie begründet“ verlangt also eine Begründung, ohne den Zusatz müssen Sie nicht begründen.

erklären, erläutern	Sachverhalte verständlich und nachvollziehbar machen und in Zusammenhän-	II

interpretieren	Zusammenhänge bzw. Ergebnisse begründet auf gegebene Fragestellungen beziehen	II

Mit der Fragestellung ist in der Regel der Sachkontext gemeint.