Hoja de trabajo S.8 #3

1 a) Características de ec. lineales:

- En una ecuación lineal relacionada con las derivadas de una función se presentan varios términos de estas derivadas de distinto orden cada uno.

- Una ecuación diferencial es lineal si tanto la variable dependiente como sus derivadas son lineal.

- Una ecuación diferencial es lineal si la variable dependiente y sus derivadas son de primer grado (esto hace referencia a que no puede estar elevado a fracciones o a y')

- La linealidad solo se exige para la variable dependiente y sus derivadas.

b) Revise las EDO de primer orden para que las clasifique como lineales y no lineales.

Lineal	No lineal
$y' + 2y = 0$	$(y')^2 + y^2 = 1$
$xy' + 2y = \operatorname{sen} x, \; x > 0$	$y' = \sqrt{x - y}$
$r + s = p + q = m + n = k$	$A(y)\dfrac{dy}{dt} = -k\sqrt{y}$
$y' + p(x)y = g(x)$	$y' = (y)^{2/5}$

c) Escribir 3 ejemplos de EDO lineales y no lineales

Lineales	No lineales
1. $x^2y'' + 4xy = 8$	$x^2y'' + y^2 = 1$ → elevada a potencia
2. $10e^x y''' + 5y'' = -yx$	$\left(\dfrac{x}{y}\right) + \tan(y'') = 9$ → dentro de función
3. $16y^{(4)} + \left(\dfrac{y'''}{4x}\right) - y = 0$	$(y-1)y''' + 3y^2 = 3xy'$

2 a) Grado 1 ⇒ $P(r) = 8(r-2) = 0$ $\boxed{r = 3}$

$P(r)$ $8r - 16 = 0$

i. E. homogénea asociada $8y' - 16y = 0$

ii. $y = ce^{4x}$ $\quad y' = 2ce^{2x}$ → reemplazo

$$8(2ce^{2x}) - 16(ce^{2x}) = 0$$

$$\underbrace{16ce^{2x}}_{y'} - 16\underbrace{ce^{2x}}_{y} = 0 \quad \boxed{\text{es solución}}$$

- Grado 2 $P(r) = 8(r-2)(r+4) = 0$ $r_1 = 2$ $r_2 = -4$

$P(r) = 8r^2 + 16r - 64 = 0$

i. E. homogenea asociada $8\frac{d^2y}{dx^2} + 16\frac{dy}{dx} - 64y = 0$

ii. $y_1 = e^{2x}$ $y_2 = e^{-4x}$

$y_1' = 2e^{2x}$ $y_2' = -4e^{-4x}$

$y_1'' = 4e^{2x}$ $y_2'' = 16e^{-4x}$

Reemplazar

$y_1 \Rightarrow 8(4e^{2x}) + 16(2e^{2x}) - 64(e^{2x}) = 0$ y_1 es sol.

$32e^{2x} + 32e^{2x} - 64e^{2x} = 0$

$y_2 \Rightarrow 8(16e^{-4x}) + 16(-4e^{-4x}) - 64(e^{-4x})$

$128e^{-4x} - 64e^{-4x} - 64e^{-4x} = 0$ y_2 es sol.

- Grado 3 $P(r) = (r-1)(r)(r-2) = 0$ $\boxed{r=1}$ $\boxed{r=2}$ $\boxed{r=0}$

$P(r) = (r^2 - 3r + 2)r = r^3 - 3r^2 + 2r$

i. Ec. homogenea asociada $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 2y = 0$

ii. $y_1 = e^x$ $y_2 = e^{2x}$ $y_3 = e^0 = 1$

$y_1' = e^x$ $y_2 = 2e^{2x}$ $y_3' = 0$

$e_1'' = e^x$ $y_2'' = 4e^{2x}$ $y_3'' = 0$

$e_1''' = e^x$ $y_2''' = 8e^{2x}$ $y_3''' = 0$

$y_1 \Rightarrow e^x - 3e^x + 2e^x = 0$ y_1 es sol.

$y_2 \Rightarrow 8e^{2x} - 3(4e^{2x}) + 2(2e^{2x}) = 0$ y_2 es sol.

$8e^{2x} - 12e^{2x} + 4e^{2x} = 0$

$y_3 \Rightarrow 0 - 3(0) + 2(0) = 0$ y_3 es sol.

- Grado 4 $P(r) = (r-1)(r+1)(r^2) = 0$ $\boxed{r=0}$ $\boxed{r=0}$ $\boxed{r=1}$ $\boxed{r=-1}$

$r^4 - r^2 = 0$

i. E. homogenea asociada $\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{d^2y}{dx^2} = 0$

ii. $y_1 = e^0 = 1$ $y_2 = e^x$ $y_3 = e^{-x}$

$y_1' = 0$ $y_2' = e^x$ $y_3' = -e^{-x}$

$y_1'' = 0$ $y_2''' = e^x$ $y_3''' = e^{-x}$

$y_1'''' = 0$ $\quad y'''_2 = e^x$ $\quad y'''_3 = -e^{-x}$

$y'''' = 0$ $\quad y''''_2 = e^x$ $\quad y''''_4 = e^{-x}$

$y_1 \Rightarrow \quad 0 - 0 = 0 \quad y_1$ es sol

$y_2 \Rightarrow \quad e^x - e^x = 0 \quad y_2$ es sol

$y_3 \Rightarrow \quad e^{-x} - e^{-x} = 0 \quad y_3$ es sol.

b) Grado 2 $\quad P(r) = (r-i)(r+i) \quad \boxed{r=i} \quad \boxed{r=-i}$

$P(r) = r^2 - i^2$

i. $y'' - i^2 y = 0$

$y_1 = e^{ix}$ $\quad y_2 = e^{-ix}$

$y_1' = i e^{ix}$ $\quad y_2' = -i e^{-ix}$

$y_1'' = i^2 e^{ix}$ $\quad y_2'' = i^2 e^{-ix}$

$y_1 \Rightarrow \quad i^2 e^{ix} - i^2 e^{ix} = 0 \quad y_1$ es sol.

$y_2 \Rightarrow \quad i^2 e^{-ix} - i^2 e^{-ix} = 0 \quad y_2$ es sol.

Grado 3 $\quad P(r) = (r+i)(r-i)(r) \quad \boxed{r=i} \quad \boxed{r=-i} \quad \boxed{r=0}$

$P(r) = r^3 - ri^2 = 0$

i. $y''' - i^2 y' = 0$

$y_1 = e^{ix}$ $\quad y_2 = e^{-ix}$ $\quad y_3 = 1$

$y_1' = i e^{ix}$ $\quad y_2' = -i e^{-ix}$ $\quad y_3' = 0$

$y_1'' = i^2 e^{ix}$ $\quad y_2'' = i^2 e^{-ix}$ $\quad y_3'' = 0$

$y_1''' = i^3 e^{ix}$ $\quad y_2''' = -i^3 e^{-ix}$ $\quad y_3''' = 0$

$y_1 \Rightarrow \quad i^3 e^{ix} - i^2 (i e^{ix}) = 0$

$i^3 e^{ix} - i^3 e^{ix} = 0 \quad y_1$ es sol

$y_2 \Rightarrow \quad -i^3 e^{-ix} - i^2(-i e^{-ix}) = 0$

$-i^3 e^{-ix} + i^3 e^{-ix} = 0 \quad y_2$ es sol.

$y_3 \Rightarrow \quad 0 - i^2(0) = 0 \quad y_3$ es sol

c) Al derivar una función exponencial, sus coeficientes forman el polinomio auxiliar $\quad e^{3x} \rightarrow 3e^{3x}$

Solo para coeficientes del

3) a. Reescribir en lenguaje operadores

- $4xy'' + \operatorname{sen}x\, y' + 10y = 0$
  $4xD^2y + \operatorname{sen}x\, Dy + 10Dy = 0$ $\qquad \underbrace{(4xD^2 + \operatorname{sen}x\, D + 10)}_{\text{operador}}y = 0$

- $5xy''' + x^2y'' + 8y' = 0$
  $5xD^3y + x^2D^2y + 8Dy = 0$ $\qquad (5xD^3 + x^2D^2 + 8D)y = 0$

- $4y' - 12y = 0$
  $4Dy - 12y = 0$ $\qquad (6D - 18)y = 0$

- $y'' - i^2y = 0$
  $D^2y - i^2y = 0$ $\qquad (D^2 - i^2)y = 0$

- $\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^2y}{dx^2} = 0$

  $D^4y + D^2y = 0$ $\qquad (D^4 + D^2)y = 0$

- $uy'' + vy' + wy = 0$
  $uD^2y + vDy + wy = 0$ $\qquad (uD^2 + vD + w)y = 0$

b. $L = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + a_{n-2}D^{n-2} + \dots + a_1D + a_0$

- $L(y_1 + y_2)$

  $a_n(y_1 + y_2)^n + a_{n-1}(y_1 + y_2)^{n-1} + \dots + a_1(y_1 + y_2)$

  $(a_ny_1^n + a_ny_2^n) + (a_{n-1}y_1^{n-1} + a_{n-1}y_2^{n-1}) + \dots + (a_1y_1 + a_1y_2)$

  $(a_ny_1^n + a_{n-1}y_1^{n-1} \dots + a_1y_1) + (a_ny_2^n + a_{n-1}y_2^{n-1} \dots a_1y_2)$

  $\qquad L(y_1) \qquad + \qquad L(y_2)$

- $L(cy_1)$

  $a_n(cy_1)^n + a_{n-1}(cy_1)^{n-1} + \dots + a_1(cy)$

  $c(a_ny_1^n) + c(a_{n-1}y^{n-1}) + \dots + c(a_1y)$

  $c(a_ny_1^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_1y)$

  $= cL(y_1)$

c. $L: N_L = \{y : L(y) = 0\}$ (subespacio de funciones n veces derivables)

- Primera Propiedad: $V_1 + V_2 \in V$ $\qquad L(y_1) = 0 \qquad L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$
  $\qquad 0 + 0 = 0$
  $y_1 + y_2 \in N_L \qquad L(y_2) = 0$

- Segunda propiedad: $\alpha a v_1 \in V \qquad L(\alpha y_1) = \alpha L(y_1)$
  $\alpha y_1 \in N_L \qquad \alpha(0) = 0$

Es subespacio porque se cumplen ambas propiedades

$i = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -1$
$i^4 = 1$
$i^5 = i$

Resolución y Formulación de Problemas

1). Probar que $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$

Teorema Taylor: $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots \frac{t^n}{n!}$

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!}$$

Pares: $\left(1 + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \ldots \frac{(ix)^{2n}}{2n!}\right.$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots - \frac{x^{2n}}{2n!} \Rightarrow \cos x$$

Impares: $(ix) + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^5}{5!} \ldots + \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \Rightarrow i \operatorname{sen} x$$

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

2) La solución general del sistema de Ecuaciones lineales no homogéneo $Ax = b$ se puede escribir como $X = X_h + X_p$
donde: X_h = solución general sistema homogéneo asociado
X_p = " particular " no "

$\Rightarrow$ $Ax = b$ es solución general de X: $X_h + X_p$ si:

$Ax = b$ es solución de X_h y por tanto $Ax = 0$ es solución de X_p

Hipotesis

$Ax = 0$

Tesis

$A(X - X_p) = Ax - Ax_p$

$b - b = 0$

R// $X - X_p$ es una solución del sistema homogéneo asociado $Ax = 0$
$(X - X_p = X_h)$ si despejamos X obtenemos $X = X_p + X_h$

$\Downarrow$

$\boxed{\text{Lo que nos dicen en el enunciado.}}$

$M(y) = f(x)$

Teorema $\Rightarrow$ Y_p siendo solución particular de $M(y) = F(x)$
Y_h " " general homogéneo asociado $M(y) = 0$

$y = Y_p + Y_h \Rightarrow$ S. general de $M(y) = F(x)$