

VEKTORI

Valerija Vidaković, 3.c

VEKTORI – ZADACI

1. Točka S sjecište je dijagonala paralelograma ABCD. Izračunaj:
2. Točke A, B, C, D, E i F vrhovi su pravilnog šesterokuta, a točka S njegovo je središte. Odredi vektore:
3. 13 zadatak 27 strana
4. Dane su točke A(-1, 2), B(5, -2), C(1, 3) i D(0, 0). Vektor \vec{AB} prikaži kao linearnu kombinaciju vektora \vec{AC} i \vec{AD} .
5. Odredi vektor \vec{a} suprotnog smjera od vektora $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$ a duljine $3\sqrt{5}$.
6. Dani su vektori $\vec{a} = -2\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j}$. Odredi vektor \vec{v} kolinearan sa \vec{c} duljine jednake duljini vektora $\vec{a} + \vec{b}$.
7. Koliki kut zatvaraju vektori $\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{a} - \vec{b}$, ako je $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$.
8. Ako je $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 9$, kolika je duljina vektora \vec{b} .
9. Odredi vektor \vec{b} okomit na vektor $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j}$ ako je $|\vec{b}| = \sqrt{5}$.
10. Odredite jedinični vektor okomit na vektor AB ako je A (-2,3), B (-4,2).
11. Odredi nepoznatu koordinatu vrha C trokuta ABC, A(-2, 1), B(4, -2), C(-1, y), tako da trokut bude pravokutan s pravim kutom pri vrhu A.

VEKTORI

1. DEFINICIJA VEKTORA

VEKTOR JE USMĐERENA DUŽINA KOD KOJE RAZLIČITIM POČETKOM I ZAVRŠNU TOČKU. (\vec{AB}) ILI $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$

DUŽINA VEKTORA $|\vec{AB}| = |\vec{a}| = d(A, B)$

VEKTOR JE ODREĐEN DUŽINOM, SMĐEROM I ORIJENTACIJOM.

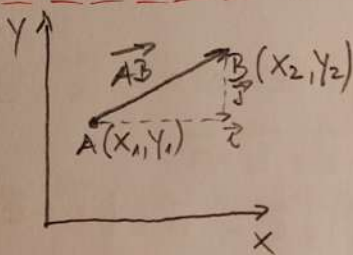
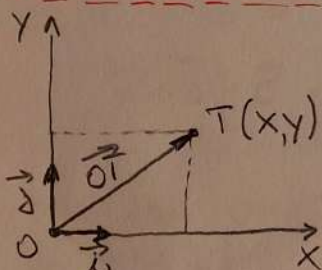
VEKTORI SU JEDNAKI AKO SU IM DUŽINA, SMĐER I ORIJENTACIJA JEDNAKI.

VEKTORI JEDNAKOG SMĐERA I DUŽINE, ALI SUPROTNE ORIJENTACIJE JESU SUPROTNI VEKTORI

$$\vec{AB} = -\vec{BA} \text{ i } \vec{a} \neq -\vec{a}$$

TO ZNAČI DA VEKTORI \vec{a} I $-\vec{a}$ IMAJU ISTU DUŽINU I LEŽE NA ISTOM PRAVCU ILI NA PARALELNIM PRAVCIMA, ORIJENTACIJA IM JE SUPROTNA.

2. VEKTORI U KOORDINATNOM SUSTAVU (KARTEZIJEV KOORDINATNI SUSTAV)



\vec{i} - JEDINIČNI VEKTOR NA OSI APSCISA

\vec{j} - JEDINIČNI VEKTOR NA OSI ORDINATA

VEKTOR \vec{OT} NAZIVAMO RADIVJEKTOR TOČKE $T(x, y)$ I PRIKAZUJEMO GA KAO LINEARNU KOMBINACIJU JEDINIČNIH VEKTORA \vec{i} I \vec{j} . $\vec{OT} = x\vec{i} + y\vec{j}$ REALNE BROJEVE x I y NAZIVAMO KOORDINATE VEKTORA \vec{OT} .

OTČENITO MOŽEMO PISATI: VEKTOR \vec{AB} = POČETKOM U TOČCI (x_1, y_1) I ZAVRŠETKOM U TOČCI $B(x_2, y_2)$ $\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$

JEDNAKI I SUPROTNI VEKTORI

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$ JEDNAKI SU AKO SU IM ODGOVARAJUĆE KOORDINATE JEDNAKE

$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_x = b_x, a_y = b_y$

DUŽINA VEKTORA $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$; $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ ZADANO $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$

NUL VEKTOR \rightarrow VEKTOR KODI IMA DUŽINU 0, ODNOSNO POČINJE I ZAVRŠAVA U ISTOJ TOČCI

JEDINIČNI VEKTOR $\rightarrow |\vec{a}_0| = 1$ NJEGOVA DUŽINA JE 1.

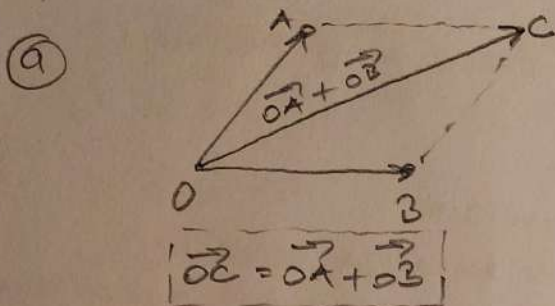
AKO VEKTOR \vec{a} PODDELIMO S NJEGOVOM DUŽINOM, DOBILI SMO JEDINIČNI VEKTOR JEDNAKOG SMĐERA I ORIJENTACIJE KAO VEKTOR \vec{a}

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

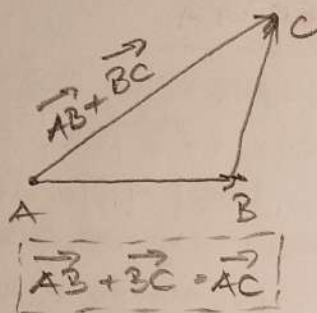
3. RAČUNANJE S VEKTORIMA

a) PRAVILO PARALELOGRAMA \vec{OA} i \vec{OB} IMAJU ZAJEDNIČKU TOČKU O

b) PRAVILO TROKUTA \rightarrow ZAVRŠETAK PRVOG PODUDARA S TOČETIKOM DRUGOG (ULANČANJE VEKTORI)



(b)



c) ZBRAJANJE VEKTORA $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$
 $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$ $\left. \begin{array}{l} \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} \end{array} \right\}$

d) ODUZIMANJE VEKTORA $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ ili $\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{DC}$

e) SVOJSTVA OPERACIJE ZBRAJANJA VEKTORA

1. KOMUNITATIVNOST $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

2. ASOCIJATIVNOST $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

3. SVOJSTVO NUL VEKTORA $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

4. SVOJSTVO SUPROTNOG VEKTORA $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

f) MNOŽENJE VEKTORA REALNIM BROJEM

1. $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$

2. SMJER MU JE JEDNAK SMJERU VEKTORA \vec{a}

3. ORIJENTACIJA MU JE JEDNAKA ORIJENTACIJI VEKTORA \vec{a} ZA $k > 0$,
A SUPROTA ORIJENTACIJI VEKTORA \vec{a} ZA $k < 0$.

$$k\vec{a} = k a_x \vec{i} + k a_y \vec{j}$$

g) SVOJSTVA MNOŽENJA VEKTORA REALNIM BROJEM

1. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

2. $\alpha(\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$

3. $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$

4. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$

5. $|\alpha \vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$

4. SKALARNI UMNOŽAK VEKTORA

(A)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

- a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \varphi$ JE PRAVI KUT
- b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| > 0 \Rightarrow \varphi$ JE TUPI KUT
- c) $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Rightarrow \varphi = 0$
- d) $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Rightarrow \varphi$ JE ŠILJASTI KUT

a) $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \geq 0$

b) ZA VEKTORE $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} = \vec{0}$ VREĐEĆI $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

c) AKO JE $\vec{a} = \vec{0}$ ILI $\vec{b} = \vec{0}$ KUT IZMEĐU VEKTORA NE POSTOJI $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

d) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

e) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

(B) SKALARNI UMNOŽAK U KOORDINATNOM SISTEMU

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \\ \vec{b} &= b_x \vec{i} + b_y \vec{j} \end{aligned} \right\} \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j})$$

$$= a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j}$$

$$= a_x b_x |\vec{i}|^2 + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + b_x a_y \vec{j} \cdot \vec{i} + a_y b_y |\vec{j}|^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

DISTRIBUTIVNOST

↓
SVAKI ČLAN JE PRAVE
ZAGRADE UMNOŽIMO SA
SVAKIM ČLANOM IZ
DRUGE ZAGRADE

$$\left. \begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{j} &= \vec{j} \cdot \vec{i} = 0 \\ |\vec{i}|^2 &= |\vec{j}|^2 = 1 \end{aligned} \right\}$$

PRIMER

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= \vec{i} - 2\vec{j} \\ \vec{b} &= 4\vec{i} + 3\vec{j} \end{aligned} \right\}$$

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$

2. $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

3. $|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

A(1, -2)

B(4, 3)

SKALARNI UMNOŽAK MOŽEHO IZRAČUNATI KA DVA NAČINA:

a) POMOĆU KUTA I MODULA $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$

b) POMOĆU KOORDINATA $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

ili
 $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$

$$1. \quad 2) \quad \vec{AB} + \vec{CS} + \vec{BD}$$

$$\vec{AB} + \vec{BD} + \vec{CS} = \vec{AD} + \vec{CS}$$

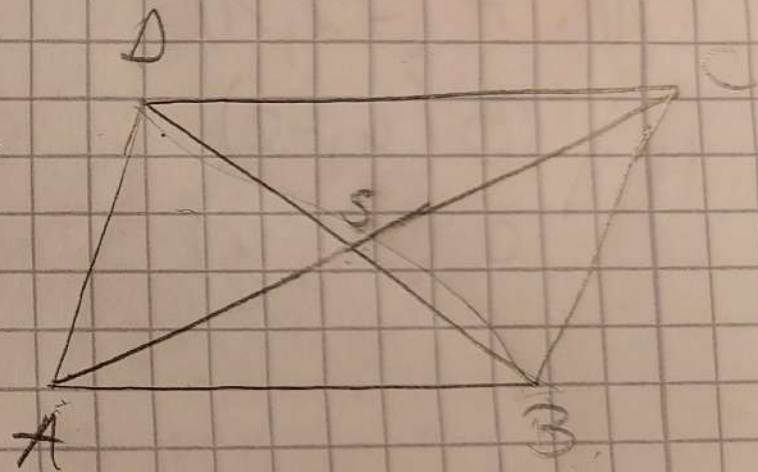
$$\vec{BC} + \vec{CS} = \vec{BS} //$$

$$4) \quad \vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD}$$

$$\vec{CS} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD}$$

$$\vec{CB} + \vec{SC} + \vec{SD}$$

$$\vec{DA} + \vec{AS} + \vec{SD} = \vec{DS} + \vec{SD} = \vec{DD} = \vec{0} //$$



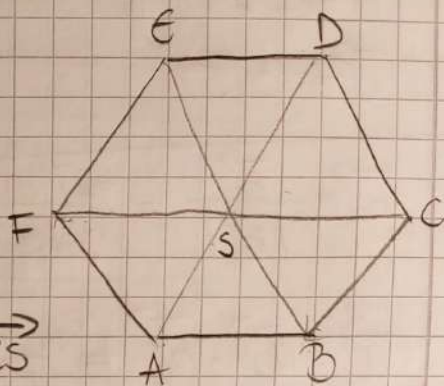
VEKTOR I

2. a) $\vec{AB} + \vec{SC} = \vec{FS} + \vec{SC} = \vec{FC}$

b) $\vec{AF} + \vec{ED} = \vec{AF} + \vec{FS} = \vec{AS}$

c) $\vec{AS} + \vec{CF} = \vec{BC} + \vec{CF} = \vec{BF}$

d) $\vec{AF} + \vec{CB} = \vec{CB} - \vec{AF} = \vec{CB} + \vec{BS} = \vec{CS}$



4. A (-1, 2)

B (5, -2)

C (1, 3)

D (0, 0)

\vec{AB} prikenat kao linear. komb. \vec{AC} i \vec{AD}

$$\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} = (5 - (-1))\vec{i} + (-2 - 2)\vec{j} = 6\vec{i} - 4\vec{j}$$

$$\vec{AC} = (x_C - x_A)\vec{i} + (y_C - y_A)\vec{j} = (1 - (-1))\vec{i} + (3 - 2)\vec{j} = 2\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{AD} = (x_D - x_A)\vec{i} + (y_D - y_A)\vec{j} = (0 - (-1))\vec{i} + (0 - 2)\vec{j} = \vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\vec{AB} = \alpha \cdot \vec{AC} + \beta \cdot \vec{AD}$$

$$6\vec{i} - 4\vec{j} = \alpha \cdot (2\vec{i} + \vec{j}) + \beta \cdot (\vec{i} - 2\vec{j})$$

$$6\vec{i} - 4\vec{j} = 2\alpha\vec{i} + \alpha\vec{j} + \beta\vec{i} - 2\beta\vec{j}$$

$$6 = 2\alpha + \beta \rightarrow \beta = 6 - 2\alpha$$

$$-4 = \alpha - 2\beta$$

$$\vec{AB} = \frac{8}{5}\vec{AC} + \frac{14}{5}\vec{AD}$$

$$-4 = \alpha - 2(6 - 2\alpha)$$

$$\beta = 6 - 2 \cdot \frac{8}{5}$$

$$-4 = \alpha - 12 + 4\alpha$$

$$\beta = \frac{6}{15} - \frac{16}{5}$$

$$8 = 5\alpha \quad | :5$$

$$\beta = \frac{30 - 16}{5} = \frac{14}{5}$$

$$\alpha = \frac{8}{5}$$

$$= \frac{1}{2} BA - AC$$

3. \vec{m}, \vec{n}

$$\vec{a} = (x-1)\vec{m} + \vec{n}$$

$$\vec{b} = 3\vec{m} + (x+1)\vec{n} \text{ kolinearni}$$

$$\vec{0} = k \cdot \vec{a}$$

$$3\vec{m} + (x+1)\vec{n} = k \cdot ((x-1)\vec{m} + \vec{n})$$

$$3\vec{m} + (x+1)\vec{n} = k(x-1)\vec{m} + k\vec{n}$$

$$\begin{matrix} x=2 & k=3 \\ x=-2 & k=-1 \end{matrix}$$

$$3 = k(x-1)$$

$$x+1 = k$$

$$3 = (x+1)(x-1)$$

$$3 = x^2 - 1$$

$$\begin{matrix} x^2 = 4 \\ \swarrow \quad \searrow \\ x_1 = 2 \quad x_2 = -2 \end{matrix}$$

↓
vektori
kolinearni

$$5. \vec{a} = ?$$

$$\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$$

$$|\vec{b}| = 3\sqrt{5}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} \\ = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} \\ = \sqrt{5}$$

$$\vec{b}_0 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{-2\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{5}} = \frac{-2\vec{i}}{\sqrt{5}} + \frac{\vec{j}}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{b}_0 = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{suprotna} \\ \text{orjen.}}}{-3\sqrt{5}} \left(\frac{-2\vec{i}}{\sqrt{5}} + \frac{\vec{j}}{\sqrt{5}} \right) = 6\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$6. \vec{a} = -2\vec{i} - 5\vec{j}$$

$$\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j}$$

$$\vec{v} = ?$$

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{v}_1 = -4\vec{i} + 2\vec{j} \\ \vec{v}_2 = 4\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\begin{cases} \vec{v} \perp \vec{c} \text{ kolinearni} \\ |\vec{v}| = |\vec{a} + \vec{b}| \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} \\ \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2y \\ \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{20} / 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (-2y) \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x = -2(2) & \text{i} & x = -2(-2) \\ x_1 = 4 & & x_2 = -4 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} (-2y)^2 + y^2 &= 20 \\ 4y^2 + y^2 &= 20 \\ 5y^2 &= 20 / :5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^2 &= 4 \\ y_1 &= 2 \\ y_2 &= -2 \end{aligned}$$

$$7. \vec{e} = \vec{a} + \vec{b} = 2$$

$$\vec{f} = \vec{a} - \vec{c} = ?$$

$$\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{e} \cdot \vec{f}}{|\vec{e}| \cdot |\vec{f}|} = \frac{-1 \cdot (-3) + 2 \cdot 4}{5\sqrt{5}} = \frac{11}{5\sqrt{5}}$$

$$|\vec{e}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{f}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

$$\boxed{\varphi = 10^\circ 11' 18''}$$

$$8. |\vec{a}| = 5$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = 13$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = 9$$

$$\vec{b} = ?$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{a^2 - 2\vec{a}\vec{b} + b^2}$$

$$9 = \sqrt{a^2 - 2\vec{a}\vec{b} + b^2} \quad |^2$$

$$81 = a^2 - 2\vec{a}\vec{b} + b^2$$

$$81 =$$

$$-544 =$$

$$|\vec{a}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos \beta = 25$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{a^2 + 2\vec{a}\vec{b} + b^2}$$

$$13 = \sqrt{a^2 + 2\vec{a}\vec{b} + b^2} \quad |^2$$

$$169 = a^2 + 2\vec{a}\vec{b} + b^2$$

$$169 = 25 + 2\vec{a}\vec{b} + b^2$$

$$25b =$$

$$169 = a^2 + 2\vec{a}\vec{b} + b^2$$

$$81 = a^2 - 2\vec{a}\vec{b} + b^2 \quad |+$$

$$250 = 2a^2 + 2b^2 \quad |:2$$

$$125 = a^2 + b^2$$

$$125 = 25 + b^2$$

$$100 = b^2$$

$$\vec{b} = 10 //$$

$$g. \quad \vec{b} = ?$$

$$\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{5}$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

$$0 = -2 \cdot b_x + 1 \cdot b_y$$

$$-b_y = -2b_x \quad (-1)$$

$$b_y = 2b_x$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \phi$$

$$= 0$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{b_x^2 + 4b_x^2} \quad /^2$$

$$5 = 5b_x^2 \quad /:5$$

$$b_x^2 = 1$$

$$b_{x_1} = 1$$

$$b_{x_2} = -1$$

$$b_{y_1} = 2$$

$$b_{y_2} = -2$$

$$\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\vec{b} = -\vec{i} - 2\vec{j}$$

10. \vec{AB}

$$A(-5, 0)$$

$$B(3, -3)$$

$$\vec{AB} = (3 - (-5))\vec{i} + (-3 - 0)\vec{j} = 8\vec{i} - 6\vec{j}$$

$$\vec{e} = e_x\vec{i} + e_y\vec{j}$$

$$|\vec{e}| = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}$$

$$1 = \sqrt{e_x^2 + \frac{16}{9}e_x^2} / 2$$

$$1 = \frac{25}{9}e_x^2 / 9$$

$$9 = 25e_x^2 / 25$$

$$\frac{9}{25} = e_x^2 / \sqrt{\quad}$$

$$e_{x1} = \frac{3}{5}$$

$$e_{x2} = -\frac{3}{5}$$

$$e_{y1} = \frac{4}{5}$$

$$e_{y2} = -\frac{4}{5}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$$

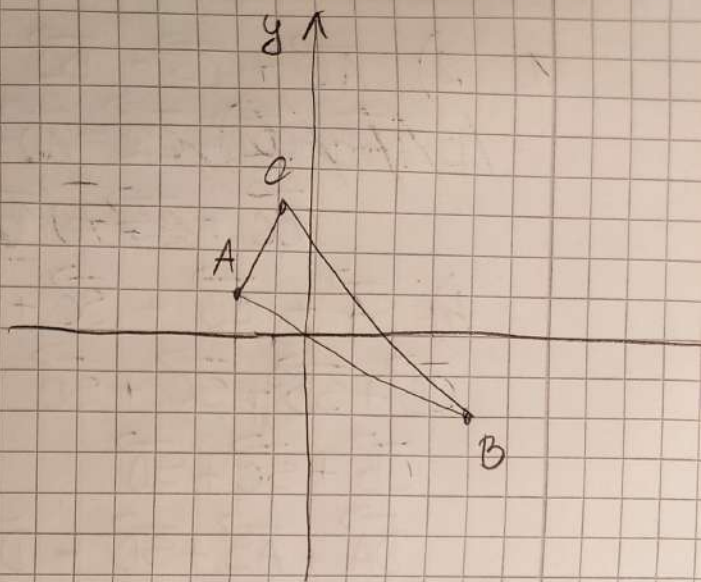
$$\vec{e}_2 = -\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$$

nj.

$$\text{10. } A(-2, 1)$$

$$B(4, -2)$$

$$C(-1, y)$$



$$\vec{AB} = (4 - (-2))\vec{i} + (-2 - 1)\vec{j} = 6\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$\vec{AC} = (-1 - (-2))\vec{i} + (y - 1)\vec{j} = \vec{i} + (y - 1)\vec{j}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$$

$$6 \cdot 1 - 3 \cdot (y - 1) = 0$$

$$6 - 3y + 3 = 0$$

$$-3y = -6 - 3$$

$$-3y = -9 \quad (-3)$$

$$\underline{y = 3}$$

$$\boxed{C(-1, 3)}$$

10.