# hoja de trabajo #1

2.1.1 Ecuación diferencial ordinaria (EDO)

Resolver $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$ → $y(x)$ es aquella curva que pasa por el punto $(x_0, y_0)$ y tiene por recta tangente una recta con pendiente $F(x_0, y_0)$

↓

que satisfaga que una curva de la familia de solución pase por el punto $(x_0, y_0)$ esto es $y(x_0) = y_0$

2.1.2 Conceptos de Solución

* Solución General : Es aquella familia monoparamétrica de curvas $g(x,y) = K$ que satisface $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$ para cualquier valor de la constante K

Una solución particular a la EDO $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$ con un P.V.I $y(x_0) = y_0$ sería una curva de aquella familia de curvas que pasa por el punto $(x_0, y_0)$ esto es, la curva correspondiente al valor de la constante $K_0 = g(x_0, y_0)$

* Solución singular : Aquella única solución a la EDO $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$ con $y(x_0) = y_0$ que no puede obtenerse a partir de la familia monoparamétrica de soluciones $g(x,y) = K$, esto es, la solución singular no está incluida en una solución general de la forma $g(x,y) = K$

- Solución general es cuando todas las soluciones están contenidas en $g(x,y) = K$
  Esta puede ser expresada en la forma $g(x,y) = K$ (solución implícita).
  Si a partir de $g(x,y) = K$ se puede obtener un despeje $y = h(x,y)$ (explícita)

Ejemplos :

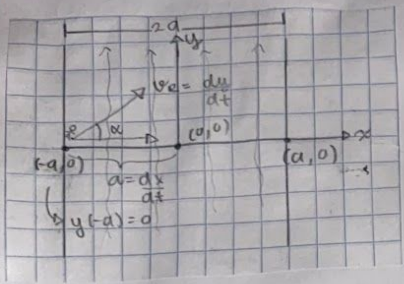
- $\frac{dy}{dx} = 2x$ ; $y = x^2 + 4$ → solución explícita particular
  ; $y = x^2 + C$ → solución explícita general

- $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ ; $x^2 + y^2 = a^2$ → solución implícita general
  ; $x^2 + y^2 = 4$ → solución implícita particular

Solución singular → no sale de la general

# Hoja de Trabajo #1

2.1.3 Ejemplo del nadador:




→ Modelo de Fluidos : $v_R = v_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$

Ahora, Tengamos en cuenta que $\tan\alpha = \frac{v_R}{v_s} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$
y suponiendo que $y = y(x)$ y $x = x(t)$

Por regla de cadena tenemos $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

$$\tan\alpha = \frac{v_R}{v_s} = \frac{\frac{dy}{dx} \cdot \cancel{\frac{dx}{dt}}}{\cancel{\frac{dx}{dt}}} = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{v_R}{v_s} = \frac{1}{v_s} v_R$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v_s} \cdot v_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{v_0}{v_s}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ ; esta sujeta al problema de valor inicial

$$y(x) = \int \frac{v_0}{v_s}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

$$y(x) = \frac{v_0}{v_s} \int \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

$$y(x) = \frac{v_0}{v_s}\left(x - \frac{1}{3a^2} x^3\right) + C$$

Y dado que $y(-a) = 0$ $\Rightarrow$ $y(-a) = \frac{v_0}{v_s}\left(-a - \frac{1}{3a^2}(-a)^3\right) + C$

$$0 = \frac{v_0}{v_s}\left(-a + \frac{a^3}{3a^2}\right) + C$$

$$0 = \frac{v_0}{v_s}\left(-a + \frac{1}{3}a\right) + C$$

$$0 = \frac{v_0}{v_s}\left(-\frac{2}{3}a\right) + C$$

$$\frac{2v_0 a}{3v_s} = C$$

$$\Rightarrow y = (x) = \frac{v_0}{v_s}\left(x - \frac{1}{3a^2}x^3\right) + \frac{2v_0 a}{3v_s}$$

$$y = (x) = \frac{v_0}{v_s}\left[x - \frac{1}{3a^2}x^3 + \frac{2}{3}a\right]$$

# differential equations

* Encontrar la FUNCION
* Las soluciones son por lo general una familia infinita de ecuaciones que satisfacen la ecuación diferencial → +C
* Mientras el orden sube, el número de constantes arbitrarias sube tambien.

  orden 2 → 2 constantes (A y B)

  Orden 1 → 1 constante (C)
* Si nos dan una condición inicial, entonces podemos reducir la solución general para llegar a una solución particular.
* Ecuación diferencial ordinaria → las funciones principales estan basadas en una variable independiente (Por lo general x o T)

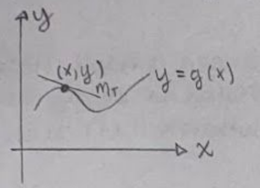
# hoja de trabajo #1

Problemas del 27-31

* En los problemas 27 al 31 una función $y = g(x)$ se describe por alguna propiedad geométrica de su gráfica. Escriba una ecuación diferencial de la forma $dy/dx = F(x,y)$ que tenga la función $g$ como su solución (o como una de las soluciones)

## desarrollo

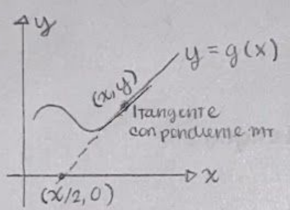
27.) La pendiente de la gráfica de g en el punto $(x,y)$ es la suma de x y y




$\rightarrow m_T = x + y$

$\rightarrow \dfrac{dy}{dx} = x + y$

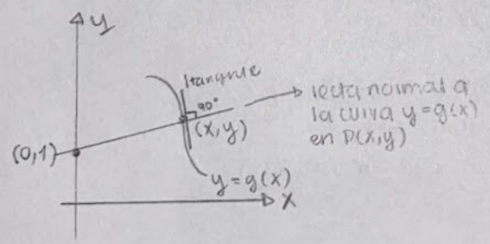
28.) La línea tangente a la gráfica de g en el punto $(x,y)$ corta el eje de las x en el punto $(x/2, 0)$




$m_T = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-0}{x-\frac{x}{2}} \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{\frac{x}{2}}$

29.) Toda línea recta normal a la gráfica de g pasa a través del punto $(0,1)$. Proponga: ¿Como sería la gráfica de la función g?



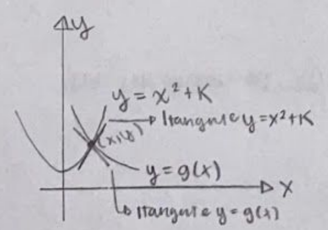

$m_{tangente} \cdot m_{ortogonal} = -1$

$\dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{y-1}{x-0} = -1$

$\dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{y-1}{x} = -1$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x}{y-1}$

30.) La gráfica de g es normal a toda curva de la forma $y = x^2 + K$ (siendo K constante) en el punto donde se encuentran




en el punto $(x,y)$ (punto donde se intersecan)

$m_{tangente} \cdot m_{ortogonal} = -1$

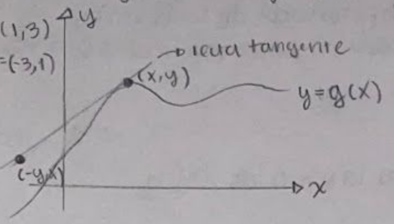
$\dfrac{dy}{dx} \cdot 2x = -1$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{2x}$

# hoja de Trabajo #1

31.) La línea tangente a la gráfica de g en $(x,y)$ pasa a través del punto $(-y,x)$

Ej: $(x,y)=(1,3)$
$(-y,x)=(-3,1)$

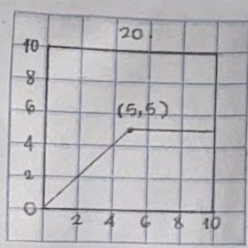



$$m_{tangente} = \frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x-(-y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x+y}$$

* En los problemas 19 al 22 una partícula inicia su recorrido en el origen y viaja a lo largo del eje x con una función de velocidad $v(t)$ cuya gráfica se muestra en las Figuras 1.2.6 a la 1.2.9. Trace la gráfica de la función para la posición que resultante $x(t)$ en el intervalo $0 \leq \tau \leq 10$

20.




$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} \tau & ; 0 \leq \tau \leq 5 \\ 5 & ; 5 \leq \tau \leq 10 \end{cases}$$

$$x(T) = \begin{cases} \frac{T^2}{2} + C_1 & ; 0 \leq \tau \leq 5 \\ 5\tau + C_2 & ; 5 \leq \tau \leq 10 \end{cases}$$

Ya que $x(0) = 0$ (inicia su recorrido en el origen)
Encontramos $C_1$:

$$\frac{0^2}{2} + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$\rightarrow x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\tau^2 & ; 0 \leq \tau \leq 5 \\ 5\tau + C_2 & ; 5 \leq \tau\ 10 \end{cases}$$

Ya que $v(t)$ es una función continua en $(0,10)$ y $v(t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow$ la función posición $x(t)$ es continua en $(0,10)$ en particular la función $x(t)$ debe ser continua en $\tau = 5$

- $$\lim_{T \to 5^-} \frac{1}{2}\tau^2 = \lim_{T \to 5^+} 5\tau + C_2$$

$$\rightarrow -\frac{25}{2} = 25 + C_2$$

$$\rightarrow -\frac{25}{2} = C_2$$

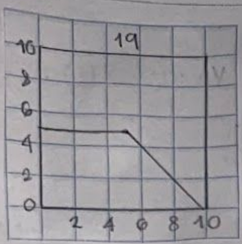
Ahora, con el valor que encontramos de $C_2$, podemos ver que:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}T^2 & ; 0 \leq \tau \leq 5 \\ 5\tau - \frac{25}{2} & ; 5 \leq \tau \leq 10 \end{cases}$$

es una función continua en $0 \leq \tau \leq 10$

# hoja de Trabajo #1

19.




$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} 5 & ; 0 \leq \tau \leq 5 \\ -\tau + 10 & ; 5 \leq \tau \leq 10 \end{cases}$$

$\bullet (5,5)$

$(10,0)^\circ$ $\quad v - 0 = \frac{5-0}{5-10}(\tau - 10)$

$v = -\tau + 10$

$$x(t) = \begin{cases} 5\tau + C_1 & ; 0 \leq \tau \leq 5 \\ \frac{-\tau^2}{2} + 10\tau + C_2 & ; 5 \leq \tau \leq 10 \end{cases}$$

Ya que $x(0) = 0$. Encontramos $C_1$

$5(0) + C_1 = 0$

$C_1 = 0$

$$\rightarrow x(t) = \begin{cases} 5\tau & ; 0 \leq \tau \leq 5 \\ \frac{-\tau^2}{2} + 10\tau + C_2 & ; 5 \leq \tau \leq 10 \end{cases}$$

Ya que $v(t)$ es una función continua en $(0,10)$ y $v(t) = \frac{dx}{dt}$ $\rightarrow$ la función posición $x(t)$ es continua en $(10,0)$. En particular la función debe ser continua en $\tau = 5$

$$\bullet \lim_{\tau \to 5^-} 5\tau = \lim_{\tau \to 5^+} -\frac{\tau^2}{2} + 10\tau + C_2$$

$$25 = -\frac{25}{2} + 50 + C_2$$

$$25 = \frac{75}{2} + C_2$$

$$25 - \frac{75}{2}$$

$$-\frac{25}{2} = C_2$$

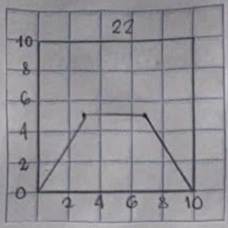
Ahora, con el valor que encontramos de $C_2$, podemos ver que:

$$x(t) = \begin{cases} 5\tau & ; 0 \leq \tau \leq 5 \\ -\frac{\tau^2}{2} + 10\tau - \frac{25}{2} & ; 5 \leq \tau \leq 10 \end{cases}$$

es una función continua en $0 \leq \tau \leq 10$

# hoja de trabajo #1

22.




$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \begin{cases} \frac{5}{3}t & ; 0 \leq t \leq 3 \\ 5 & ; 3 \leq t \leq 7 \\ -\frac{5}{3}t + \frac{50}{3} & ; 7 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

$\bullet(3,5)$ $\bullet(0,0)$ $v - 0 = \frac{5-0}{3-0}(t-0)$

$v = \frac{5}{3}t$

$\bullet(7,5)$ $\bullet(10,0)$ $v - 0 = \frac{5-0}{7-10}(t-10)$

$v = -\frac{5}{3}t + \frac{50}{3}$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{5}{6}t^2 + C_1 & ; 0 \leq t \leq 3 \\ 5t + C_2 & ; 3 \leq t \leq 7 \\ -\frac{5}{6}t^2 + \frac{50}{3}t + C_3 & ; 7 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

Ya que $x(0)=0$ (condición inicial) hallamos $C_1$:

$\frac{5}{6}(0)^2 + C_1 = 0$

$C_1 = 0$

Ya que $v(t)$ es una función continua en $(0,10)$ y $v(t) = \frac{dx}{dt}$ $\rightarrow$ la función posición $x(t)$ es continua en $(0,10)$ en particular la función $x(t)$ debe ser continua en $t=3$ y $t=7$

- $\lim_{t \to 3^-} \frac{5}{6}t^2 = \lim_{t \to 3^+} 5t + C_2$

  * En $T=3$ los límites laterales deben ser iguales.

  $\frac{15}{2} = 15 + C_2$

  $-\frac{15}{2} = C_2$

- $\lim_{t \to 7^-} 5t - \frac{15}{2} = \lim_{t \to 7^+} -\frac{5}{6}t^2 + \frac{50}{3}t + C_3$

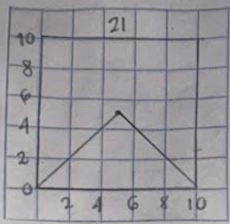
  * En $T=7$ los límites laterales deben ser iguales

  $-\frac{145}{3} = C_3$

Para que la función sea continua en $T=3$ y $T=7$ (o sea en $(0,10)$) es suficiente que $C_1 = -\frac{15}{2}$ y $C_3 = -\frac{145}{3}$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{5t^2}{6} & ; 0 \leq t \leq 3 \\ 5t - \frac{15}{2} & ; 3 \leq t \leq 7 \\ -\frac{5}{6}t^2 + \frac{50}{3}t - \frac{145}{3} & ; 7 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

# hoja de trabajo #1




$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \begin{cases} \tau & ; 0 \leq \tau \leq 5 \\ -\tau + 10 & ; 5 \leq \tau \leq 10 \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{\tau^2}{2} + C_1 & ; 0 \leq \tau \leq 5 \\ -\frac{\tau^2}{2} + 10\tau + C_2 & ; 5 \leq \tau \leq 10 \end{cases}$$

Ya que $x(0) = 0$, Entonces:

$$\frac{0^2}{2} + C_1 \rightarrow C_1 = 0$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{\tau^2}{2} & ; 0 \leq \tau \leq 5 \\ -\frac{\tau^2}{2} + 10\tau + C_2 & ; 5 \leq \tau \leq 10 \end{cases}$$

Ya que $v(t)$ es una función continua en $(0,10)$ y $v(t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow$ la función posición $x(t)$ es continua en $(0,10)$ en particular la función debe ser continua en $\tau = 5$

$$\bullet \lim_{\tau \to 5^-} \frac{\tau^2}{2} = \lim_{\tau \to 5^+} -\frac{\tau^2}{2} + 10\tau + C_2$$

$$\frac{25}{2} = -\frac{25}{2} + 50 + C_2$$

$$\frac{25}{2} = \frac{75}{2} + C_2$$

$$\frac{25}{2} - \frac{75}{2} = C_2$$

$$-25 = C_2$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{\tau^2}{2} & ; 0 \leq \tau \leq 5 \\ -\frac{\tau^2}{2} + 10\tau - 25 & ; 5 \leq \tau \leq 10 \end{cases}$$

# hoja de Trabajo #1

35. Se lanza una piedra, desde la posición de reposo, a una altura inicial $h$ arriba de la superficie de la Tierra. Mostrar que la velocidad con la cual golpea el piso es $v = \sqrt{2gh}$

movimiento de caída libre: $a = -g$

$$\frac{dv}{dt} = -g$$

$$v(t) = \int -g\,dt$$

$$v(t) = -gt + C_1$$

Recordemos que $v(0) = 0$ (... posición de reposo)

$$v(0) = -g(0) + C_1$$

$$0 = C_1$$

$$v(t) = -gt$$

$$\rightarrow v(t) = \frac{dy}{dt} = -gt$$

$$y(t) = \int -g\tau\,d\tau$$

$$y(t) = \frac{-1}{2} g\tau^2 + C_2$$

Recordemos que $y(0) = h$ (... a una altura inicial $h$)

$$y(0) = -\frac{1}{2} g(0)^2 + C_2$$

$$h = C_2$$

$$y(\tau) = -\frac{1}{2} g\tau^2 + h$$

Para poder hallar la velocidad de impacto debemos primero encontrar el tiempo que la piedra demora cayendo $\tau_{caída}$

El tiempo de caída ($\tau_c$) se halla cuando $y = 0$

$$-\frac{1}{2} g\tau_c^2 + h = 0$$

$$h = \frac{1}{2} g\tau_c^2$$

$$\frac{2g}{h} = \tau_c^2$$

$$+\sqrt{\frac{2h}{g}} = \tau_c \quad (\tau_c > 0)$$

$\rightarrow$ Velocidad de impacto con la tierra $= v(\tau_c)$

$$= -g \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$= -g \frac{\sqrt{2h}}{\sqrt{g}}$$

$$= -\sqrt{g}\sqrt{2h}$$

$\rightarrow V_{impacto}: -\sqrt{2gh}$

R// La rapidez con la cual impacta el suelo es $\sqrt{2gh}$