REVISTA DE CIÊNCIA ELEMENTAR

Zona de audibilidade

João Nuno Tavares
CMUP/ Universidade do Porto

CITAÇÃO
Tavares, J. N.(2021)
Zona de audibilidade,
Rev. Ciência Elem., V9(04):064.
doi.org/10.24927/rce2021.064

EDITOR
João Nuno Tavares
Universidade do Porto

EDITOR CONVIDADO
Maria João Ramos
Universidade do Porto

RECEBIDO EM
22 de julho de 2021

ACEITE EM
22 de julho de 2021

PUBLICADO EM
15 de dezembro de 2021

Deitados na praia, vemos um avião voar, a uma certa altitude. É claro que não ouvimos instantaneamente o som emitido pelos motores no instante em que ele passa sobre nós. O som tem uma certa velocidade de propagação e, por isso, demora a chegar a nós. O que ouvimos é o som emitido antes. O que vamos discutir neste pequeno artigo é a chamada zona de audibilidade, isto é, a região do solo (suposto plano) onde se ouve o ruído dos motores do avião.

Descrição do problema

Um avião voa com uma velocidade V, superior à velocidade do som, S. Em cada instante, o motor do avião emite um som que se propaga no espaço, com velocidade S, em todas as direções, sob a forma de ondas esféricas — estas esferas chamam-se as frentes de onda. Quando atingem o solo, intersetam-no em círculos cujo raio vai crescendo à medida que o tempo avança. Se um habitante da região sobrevoada pelo avião estiver dentro destes círculos, ele ouvirá o ruído dos motores do avião.

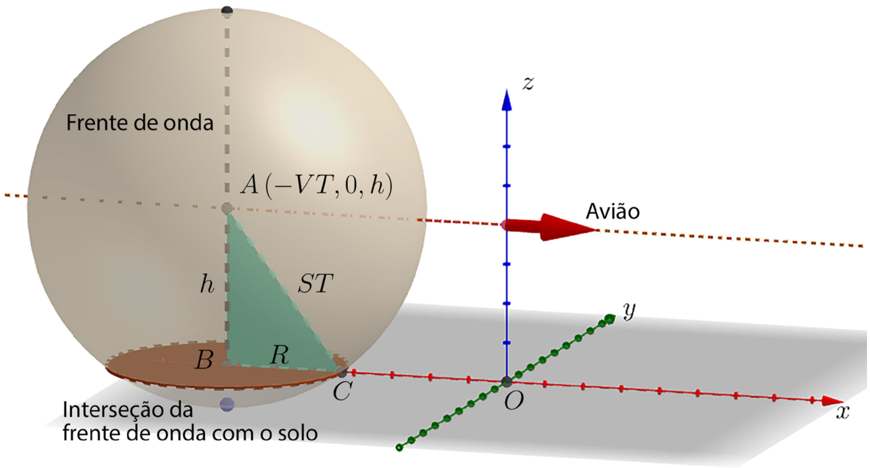

FIGURA 1. Avião, frente de onda, emitida no ponto $A = (-VT, 0, h)$, e sua interseção com o solo (o plano Oxy).

Objetivo

Analisar a zona de audibilidade num certo instante. Por outras palavras, fixamos um instante, digamos, o instante 0 (congelamos o tempo nesse instante), onde o avião está no ponto $(0, 0, h)$, e vemos como é a região do solo onde o avião foi ouvido (FIGURA 1).

Dados do problema:

- A altura $h > 0$ do voo (suposta constante), medida em km.
- A velocidade V do avião (suposta constante), medida em km/h.
- A velocidade S de propagação do som (suposta também constante), medida em km/h.
- O avião desloca-se em movimento retilíneo uniforme, ao longo da reta paralela ao eixo dos x's, no plano Oxz, a uma altura h do plano do solo — o plano Oxy. O avião voa da esquerda para a direita, no sentido positivo do eixo dos x's. Supomos ainda que o voo é supersónico: $V > S$.

Cálculos

Analisemos então a zona de audibilidade no instante 0. Neste instante o avião está no ponto $(0, 0, h)$, por cima da origem das coordenadas, O. $T > 0$ horas mais cedo o avião estava no ponto $A = (-VT, 0, h)$ (FIGURA 1). No ponto A, o motor do avião emitiu um som que se prapaga em todas as direções com velocidade $S < V$. A frente de onda tem pois a forma de uma esfera cujo raio cresce com velocidade S.

Qual o raio dessa esfera no instante 0?

Como passaram T horas, até o avião chegar ao ponto $(0, 0, h)$, é claro que esse raio é igual a ST. Essa esfera, no instante $t = 0$, interseta o solo segundo uma circunferência centrada em $(-VT, 0, 0)$, e cujo raio é $R = \sqrt{(ST)^2 - h^2}$, como se deduz facilmente, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ABC, e atendendo a que $\overline{AB} = h$ e $\overline{AC} = ST$ (FIGURA 1).

Generalização

O mesmo acontece em cada instante $t : 0 < t \leq T$ — nesse instante o avião está no ponto $(-Vt, 0, h)$ e, nesse ponto, o motor do avião emite um som que se prapaga em todas as direções com velocidade S. A frente de onda correspondente tem mais uma vez a forma de uma esfera cujo raio cresce com velocidade $S < V$. Essa esfera, no instante $t = 0$, tem um raio igual a St e interseta o plano do solo segundo uma circunferência C_t, centrada em $(-Vt, 0, 0)$ e cujo raio é $\sqrt{(St)^2 - h^2}$.

No plano Oxy, a equação dessa circunferência é

$$C_t : (x + Vt)^2 + y^2 = (St)^2 - h^2 \tag{1}$$

Zona de audibilidade

É agora claro que a zona de audibilidade, no instante 0 é constituída por todos os pontos do solo que estão dentro dos círculos delimitados por todas estas circunferências C_t, para $t : 0 < t \leq T$ (FIGURA 2), isto é, por todos os pontos (x, y) do solo, que satisfazem as inequações (uma para cada t):

$$(x + Vt)^2 + y^2 \leq (St)^2 - h^2, \qquad \forall t : 0 \leq t \leq T \tag{2}$$

ou, fazendo as contas:

$$\left(V^2 - S^2\right) t^2 + 2Vxt + \left(x^2 + y^2 + h^2\right) \leq 0 \qquad \forall t : 0 \leq t \leq T \tag{3}$$

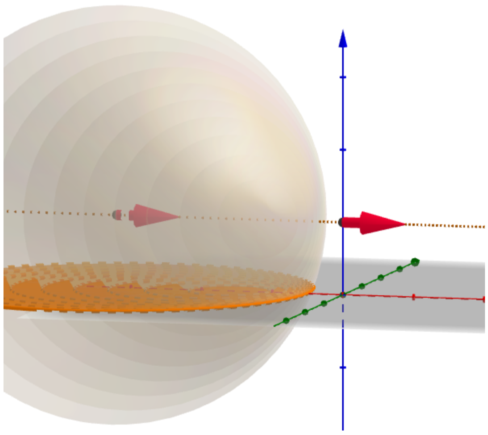

FIGURA 2. Zona de audibilidade, no instante 0.

Para cada t, esta é uma inequação do segundo grau em t. Quais as condições em que admite solução? A resposta está dada no teorema seguinte, cuja demonstração é simples:

Teorema

Considere um polinómio quadrático da forma:

$$at^2 + bt + c$$

com coeficientes $a > 0$ e $c > 0$. Para que exista um $t \geq 0$ que satisfaça a inequação:

$$at^2 + bt + c \leq 0$$

é necessário e suficiente que:

1. $b < 0$
2. $b^2 - 4ac \geq 0$.

No nosso caso, a inequação é (3) com:

$$a = V^2 - S^2 > 0, \quad b = 2Vx \text{ e } c = x^2 + y^2 + h^2 > 0$$

Aplicando os critérios do teorema, concluímos que:

1. $b = 2Vx < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0$
2. $b^2 - 4ac \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2Vx)^2 - 4\left(V^2 - S^2\right)\left(x^2 + y^2 + h^2\right) \geq 0$

Esta última desigualdade pode ser escrita na forma:

$$\frac{x^2}{\left[\left(V^2 - S^2\right)/S^2\right]h^2} - \frac{y^2}{h^2} \geq 1$$

ou, fazendo $k = \dfrac{V}{S}h$, na forma:

$$\frac{x^2}{k^2 - h^2} - \frac{y^2}{h^2} \geq 1 \tag{4}$$

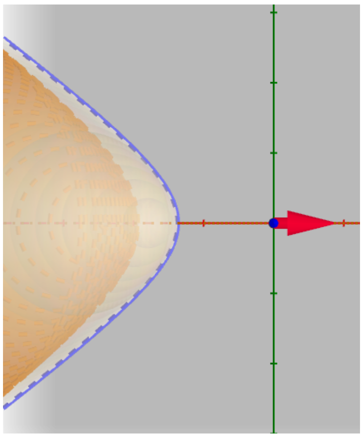

FIGURA 3. Zona de audibilidade no solo, no instante 0.

Conclusões

1. A zona de audibilidade no instante $t = 0$ consiste de todos os pontos (x, y) do solo, que satisfazem:

$$\frac{x^2}{k^2 - h^2} - \frac{y^2}{h^2} \geq 1 \text{ e } x < 0 \quad (5)$$

2. A hipérbole de equação:

$$\frac{x^2}{k^2 - h^2} - \frac{y^2}{h^2} = 1 \quad (6)$$

é a envolvente das circunferências C_t, dadas por (1) (FIGURA 3).

BIBLIOGRAFIA

[1] BOLTYANSKII, V., *Envelopes. Popular lectures in mathematics*, *Pergamon Press and MIR Editions*. 1964.

[2] HANNA, G. & JAHNKE, H. N., *Arguments from Physics in Mathematical Proofs: An Educational Perspective*, *For the Learning of Mathematics*, 22, 3, p. 38-45. 2002.