

Kapitola 2

Průsečíky tělesa s přímkou

Jedná s o rozvinutí úlohy „hledání průsečíku roviny a přímky“, pro řešení opět využijeme **pomocnou rovinu** proloženou přímkou, na níž hledáme průsečíky. Sestrojíme řez tělesa touto pomocnou rovinou a hledáme průsečíky stran řezu s danou přímkou. Na výběr máme několik typů pomocných rovin:

- kolmou k některé průmětně — půdorysně, nárysně nebo bokorysně
- speciální:
 - **směrovou** — rovnoběžnou s bočními hranami hranolu (osou válce)
 - **vrcholovou** — procházející vrcholem jehlanu (kužele)

2.1 Rovina kolmá k průmětně

Výhodou rovin kolmých k průmětnám je jednoduchost jejich sestavení, stopa roviny kolmé k průmětně splývá v této průmětně s průmětem dané přímky, v ostatních průmětnách jsou stopy kolmé k příslušným souřadným osám. Například rovina kolmá k půdorysně:

- v půdorysném průmětu splyne půdorysná stopa s půdorysným průmětem prokládané přímky
- v nárysně bude nárysná stopa kolmá k ose $x_{1,2}$

tudíž stačí najít průsečíky stopy splývající s průmětem dané přímky s hranami tělesa a odvodit je do dalšího průmětu. V dalším průmětu získáme n -úhelník řezu a hlavně průsečíky stran řezu s danou přímkou.

2.2 Speciální roviny

Roviny speciální (směrová, vrcholová) jsou konstrukčně poněkud komplikovanější, ale získáváme velmi jednoduchý obrazec řezu. Řezem kosého hranolu a kosého válce je čtyřstranný rovnoběžník (kosodélník), kosého jehlanu a kosého kužele dokonce jenom trojúhelník.

2.2.1 Směrová rovina

Směrovou rovinu prokládáme přímkou, na které hledáme průsečíky, rovnoběžně s bočními hranami kosého hranolu. Musíme tudíž najít alespoň dvě přímky v této rovině ležící a sestrojít jejich stopníky.

Průměty libovolného bodu dané přímky vedeme přímky **rovnoběžné** s průměty bočních hran a určíme stopníky. Pokud těleso stojí na půdorysně, pak nám stačí najít průsečíky půdorysné stopy s n -úhelníkem podstavy a těmito body vedeme boční strany kosodelníku řezu (rovnoběžné s bočními hranami hranolu), které protnou danou přímkou v hledaných průsečících.

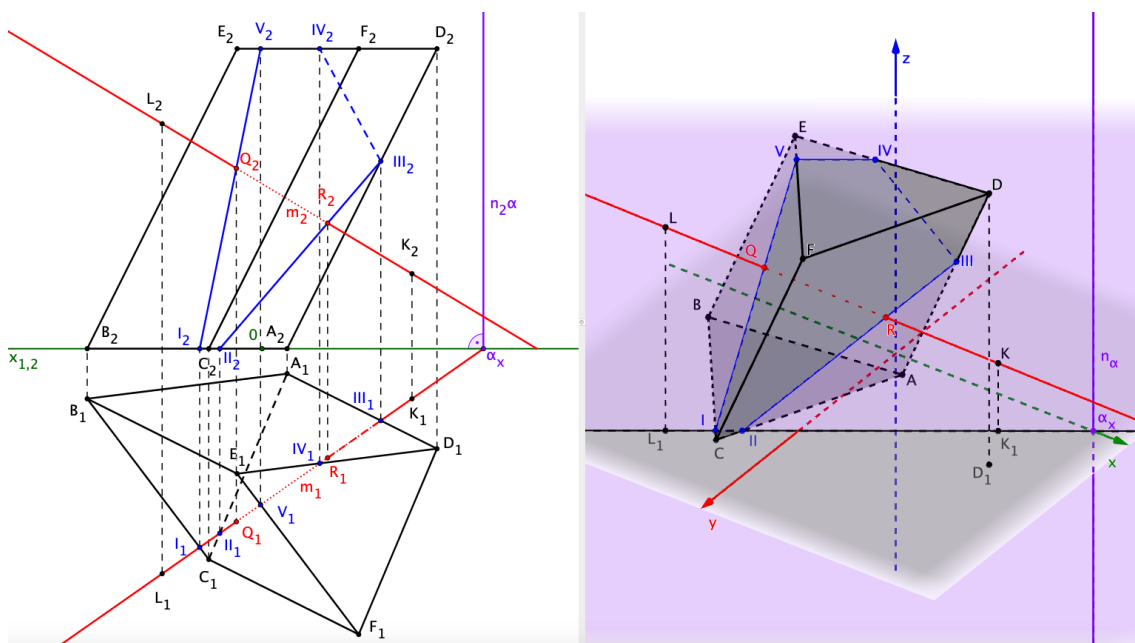
2.2.2 Vrcholová rovina

Vrcholová rovina je určena vrcholem jehlanu (kužele) s danou přímkou jednoznačně. Opět určíme stopníky přímek, tentokrát nejsou rovnoběžné, ale jsou to spojnice průmětů libovolného bodu přímky s průměty vrcholu tělesa. Pokud těleso stojí na půdorysně, stačí průsečíky půdorysné stopy s n -úhelníkem podstavy spojit s vrcholem tělesa a dostáváme trojúhelník řezu, který určí průsečíky na dané přímce.

2.3 Řešené příklady

2.3.1 Průsečíky kosého hranolu s přímkou

Rovina kolmá k půdorysně



Přímkou KL prokládáme rovinu α kolmou k půdorysně a získáme **nepravidelný** n -úhelník $I III III IV V$, jehož strany protnou přímkou KL v hledaných průsečících R, Q .

1. rovina α : půdorysná stopa $p_1^\alpha = K_1L_1$ protíná v bodě α_x souřadnou osu $x_{1,2}$, kterým prochází nárysná stopa n_2^α kolmá k $x_{1,2}$ (půdorysnou stopu nevytahujeme silně! na přímce K_1L_1 budeme určovat viditelnost)
2. sestrojíme vrcholy n -úhelníku řezu, na pořadí a značení průsečíků nezáleží:

- a) $B_1C_1 \cap K_1L_1 = I_1 \xrightarrow{ord} I_2 \in B_2C_2 (\subset x_{1,2})$
- b) $A_1C_1 \cap K_1L_1 = II_1 \xrightarrow{ord} II_2 \in A_2C_2 (\subset x_{1,2})$
- c) $A_1D_1 \cap K_1L_1 = III_1 \xrightarrow{ord} III_2 \in A_2D_2$
- d) $D_1E_1 \cap K_1L_1 = IV_1 \xrightarrow{ord} IV_2 \in D_2E_2$
- e) $E_1F_1 \cap K_1L_1 = V_1 \xrightarrow{ord} V_2 \in E_2F_2$

3. sestrojíme nárysný průmět n-úhelníku řezu včetně viditelnosti

4. najdeme průsečíky v nárysném průmětu a odvodíme rovnou jejich půdorysy:

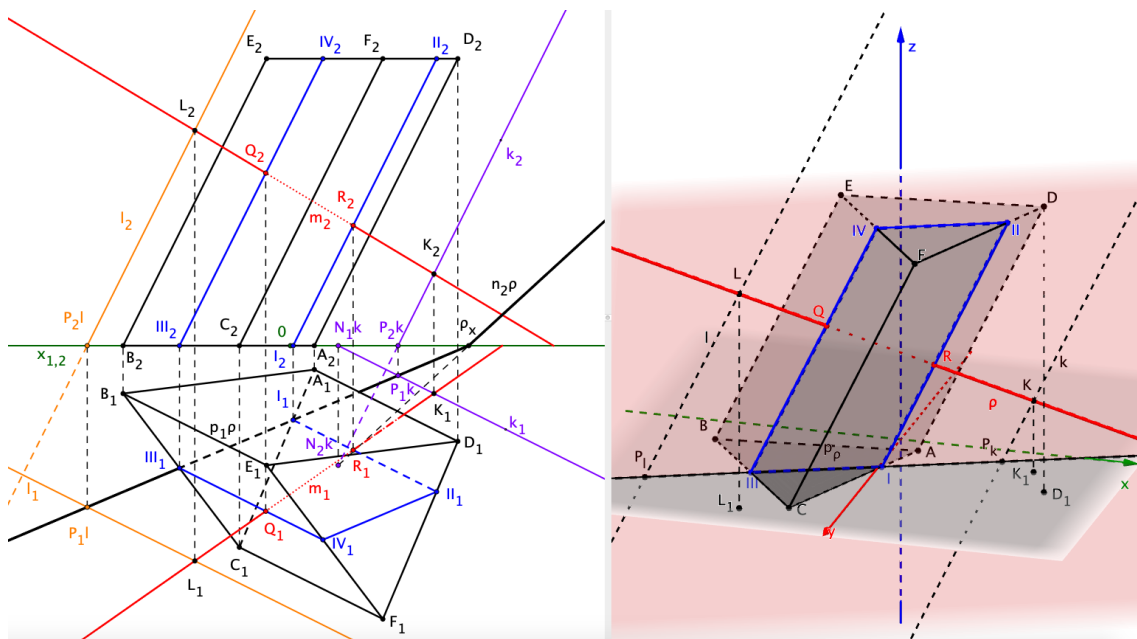
$$II_2III_2 \cap K_2L_2 = R_2 \xrightarrow{ord} R_1 \in K_1L_1$$

$$I_2V_2 \cap K_2L_2 = Q_2 \xrightarrow{ord} Q_1 \in K_1L_1$$

5. viditelnost:

R_1 - neviditelný ("nvd"), Q_1 - viditelný ("vd") $\implies \alpha_x III_1$ - vd, III_1R_1 - nvd,
 R_1Q_1 - nvd, Q_1L_1 - vd
 R_2 - vd, Q_1 - vd $\implies R_2K_2$ - vd, R_2Q_2 - nvd, Q_2L_2 - vd

Směrová rovina



Přímku KL prokládáme rovinu rovnoběžnou s bočními hranami a získáme **pravidelný** rovnoběžník $I III III IV$, jehož strany protnou přímku KL v hledaných průsečících R, Q .

- 1. a) bodem K proložíme přímku k rovnoběžnou s hranou AD
 $K_1 \in k_1 \parallel A_1D_1, \quad K_2 \in k_2 \parallel A_2D_2$

- 1. b) hledáme stopníky přímky k (zajímají nás primárně půdorysné):
 $k_2 \cap x_{1,2} = P_2^k \xrightarrow{ord} P_1^k \in k_1,$
 $k_1 \cap x_{1,2} = N_1^k \xrightarrow{ord} N_2^k \in k_2$

2. a) bodem L proložíme přímkou l rovnoběžnou s hranou AD
 $L_1 \in l_1 \parallel A_1D_1, \quad L_2 \in l_2 \parallel A_2D_2$

2. b) hledáme stopníky přímky l :

$$l_2 \cap x_{1,2} = P_2^l \xrightarrow{ord} P_1^l \in l_1,$$

$$l_1 \cap x_{1,2} = N_1^l \xrightarrow{ord} N_2^l \in l_2$$

3. sestrojíme stopy směrové roviny ρ :

$$p_1^\rho = P_1^k P_1^l, \quad n_2^\rho = N_2^l N_2^k$$

4. najdeme průsečíky p_1^ρ s podstavou a sestrojíme rovnoběžník řezu:

$$A_1C_1 \cap p_1^\rho = I_1; \quad I_1II_1 \parallel A_1D_1,$$

$$B_1C_1 \cap p_1^\rho = III_1; \quad III_1IV_1 \parallel A_1D_1$$

5. najdeme průsečíky v půdorysném průmětu a odvodíme rovnou jejich nárysy:

$$I_1II_1 \cap K_1L_1 = R_1 \xrightarrow{ord} R_2 \in K_2L_2 (\in I_2II_2)$$

$$III_1IV_1 \cap K_1L_1 = Q_1 \xrightarrow{ord} Q_2 \in K_2L_2 (\in III_2IV_2)$$

6. viditelnost:

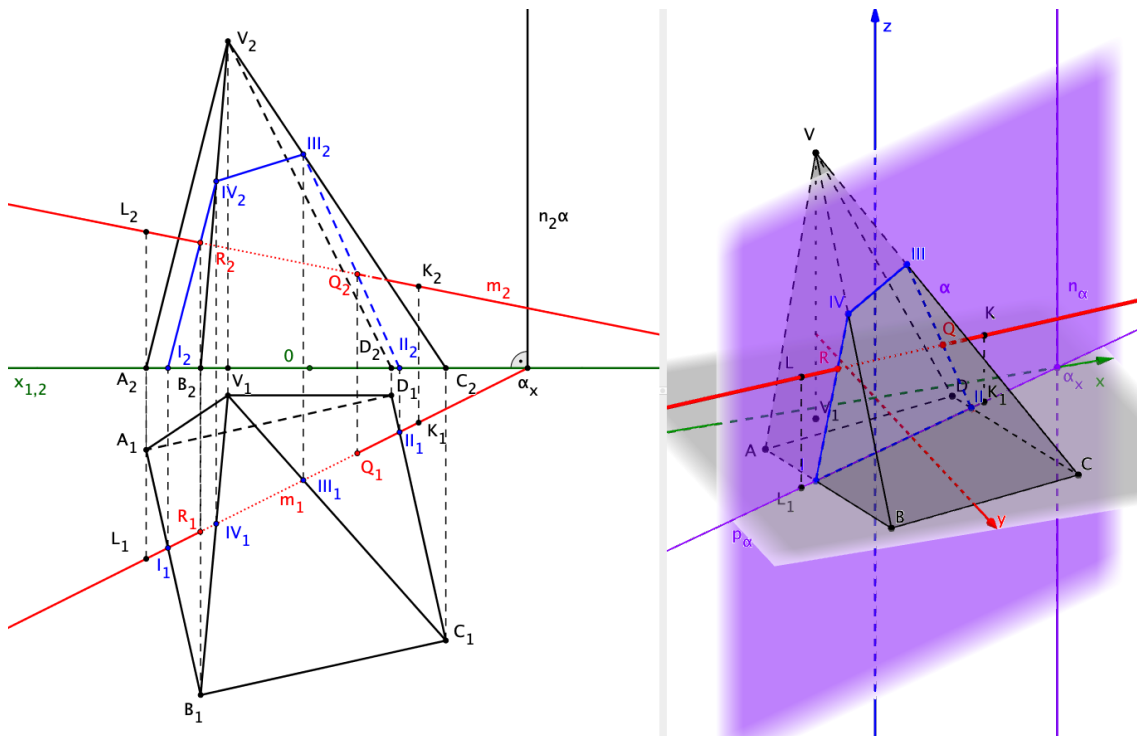
R_1 - neviditelný ("nvd"), Q_1 - viditelný ("vd") $\implies \alpha_x III_1$ - vd, III_1R_1 - nvd,

R_1Q_1 - nvd, Q_1L_1 - vd

R_2 - vd, Q_2 - vd $\implies R_2K_2$ - vd, R_2Q_2 - nvd, Q_2L_2 - vd

2.3.2 Průsečíky kosého jehlanu s přímkou

Rovina kolmá k půdorysně



Přímkou KL prokládáme rovinu α kolmou k půdorysně a získáme **nepravidelný** n-úhelník $I II III IV$, jehož strany protnou přímkou KL v hledaných průsečících R, Q .

- rovina α : půdorysná stopa $p_1^\alpha = K_1L_1$ protíná v bodě α_x souřadnou osu $x_{1,2}$, kterým prochází nárysná stopa n_2^α kolmá k $x_{1,2}$ (půdorysnou stopu **nevytahuje** silně! na přímce K_1L_1 budeme určovat viditelnost)
- sestrojíme vrcholy n-úhelníku řezu, na pořadí a značení průsečíků nezáleží:
 - $A_1B_1 \cap K_1L_1 = I_1 \xrightarrow{ord} I_2 \in A_2B_2 (\subset x_{1,2})$
 - $C_1D_1 \cap K_1L_1 = II_1 \xrightarrow{ord} II_2 \in C_2D_2 (\subset x_{1,2})$
 - $V_1C_1 \cap K_1L_1 = III_1 \xrightarrow{ord} III_2 \in V_2C_2$
 - $V_1B_1 \cap K_1L_1 = IV_1 \xrightarrow{ord} IV_2 \in V_2B_2$
- sestrojíme nárysný průmět n-úhelníku řezu včetně viditelnosti
- najdeme průsečíky v nárysném průmětu a odvodíme rovnou jejich půdorysy:

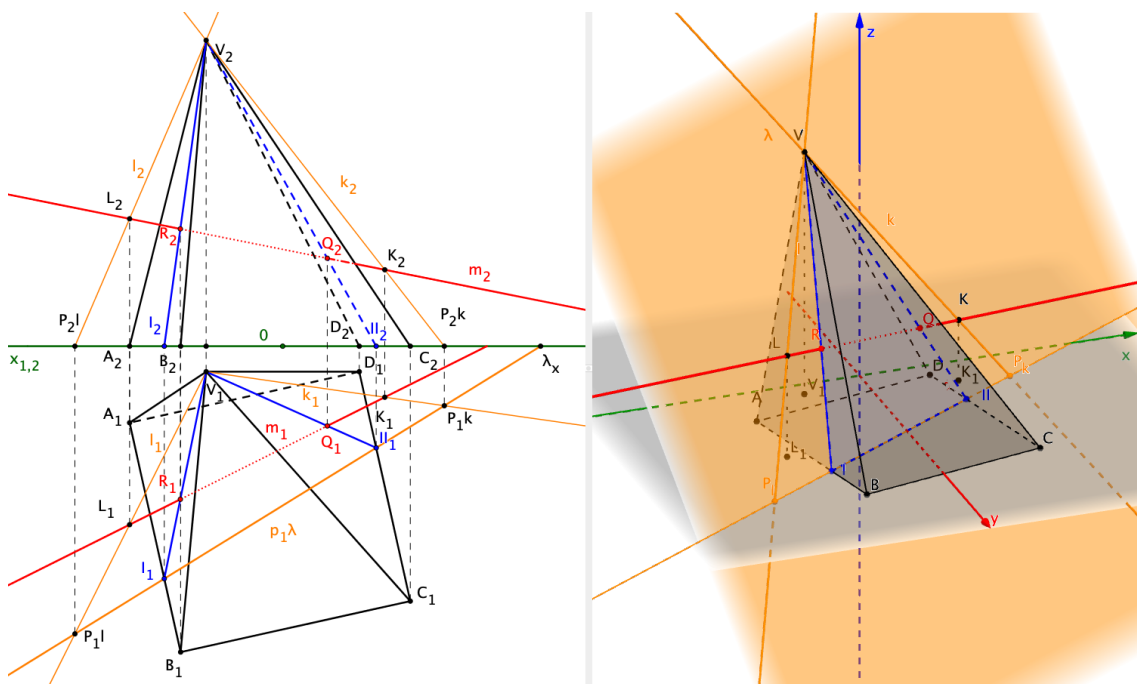
$$I_2IV_2 \cap K_2L_2 = R_2 \xrightarrow{ord} R_1 \in K_1L_1$$

$$II_2III_2 \cap K_2L_2 = Q_2 \xrightarrow{ord} Q_1 \in K_1L_1$$

- viditelnost:

R_1 - viditelný ("vd"), Q_1 - vd $\implies K_1Q_1$ - vd, R_1Q_1 - neviditelná ("nvd"),
 R_1L_1 - vd
 R_2 - vd, Q_2 - nvd $\implies R_2L_2$ - vd, R_2Q_2 - nvd, od Q_2 po C_2V_2 - nvd, od C_2V_2 přes K_2 - vd

Vrcholová rovina



Přímku KL prokládáme rovinu λ procházející vrcholem jehlanu V a získáme trojúhelník $III V$, jehož strany protnou přímku KL v hledaných průsečících R, Q .

- hledáme přímky roviny λ procházející vrcholem V a protínající přímku $KL \implies k = KV, l = LV$

- a) $k_1 = K_1V_1$, $k_2 = K_2V_2$
 hledáme stopníky přímký k (zajímají nás primárně půdorysné):
 $k_2 \cap x_{1,2} = P_2^k \xrightarrow{ord} P_1^k \in k_1$
- b) $l_1 = L_1V_1$, $l_2 = L_2V_2$
 hledáme stopníky přímký l :
 $l_2 \cap x_{1,2} = P_2^l \xrightarrow{ord} P_1^l \in l_1$
2. sestrojíme půdorysnou stopu vrcholové roviny λ :
 $p_1^\lambda = P_1^k P_1^l$
3. najdeme průsečíky p_1^λ s podstavou a sestrojíme trojúhelník řezu:
 $A_1B_1 \cap p_1^\lambda = I_1$,
 $C_1D_1 \cap p_1^\lambda = II_1$
4. najdeme průsečíky v půdorysném průmětu a odvodíme rovnou jejich nárysy:

$$I_1V_1 \cap K_1L_1 = R_1 \xrightarrow{ord} R_2 \in K_2L_2 (\in I_2V_2)$$

$$II_1V_1 \cap K_1L_1 = Q_1 \xrightarrow{ord} Q_2 \in K_2L_2 (\in II_2V_2)$$
5. viditelnost:
 R_1 - viditelný ("vd"), Q_1 - vd $\implies K_1Q_1$ - vd, R_1Q_1 - neviditelná ("nvd"),
 R_1L_1 - vd
 R_2 - vd, Q_2 - nvd $\implies R_2L_2$ - vd, R_2Q_2 - nvd, od Q_2 po C_2V_2 - nvd, od C_2V_2
 přes K_2 - vd