**Esercizio 1.** Determinare un'equazione parametrica delle seguenti rette dello spazio:

(a) Passante per il punto $P(1,3,1)$ e parallela al vettore $\mathbf{v_r} = (2,0,0)$.
(b) Passante per i punti $A(1,0,2)$ e $B(3,-1,0)$.

Soluzione:

(a) Poiché conosciamo la direzione $\mathbf{v_r} = (2,0,0)$ della retta $r$ cercata, possiamo scriverne direttamente un'equazione parametrica:

$$r: \ (x,y,z) = P + \mathbf{v_r}t = (1,3,1) + (2,0,0)t \ \Rightarrow \ r: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \forall\, t \ \in \ \mathbb{R}$$

Notiamo che l'equazione si può equivalentemente scrivere

$$r: \begin{cases} x = s \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \forall\, s \ \in \ \mathbb{R}$$

e che si tratta di una retta parallela all'asse delle $x$, passante per il punto $(0,3,1)$.

(b) La retta cercata ha direzione $\mathbf{v_r} = B - A = (2,-1,-2)$, quindi:

$$r: \ (x,y,z) = A + \mathbf{v_r}t = (1,0,2) + (2,-1,-2)t \ \Rightarrow \ r: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -t \\ z = 2-2t \end{cases} \qquad \forall\, t \ \in \ \mathbb{R}$$

□

**Esercizio 2.** Verificare che le equazioni

$$r_1: \ (x,,y,z) = (-1,1,2) + (2,-2,4)t \qquad \text{e} \qquad r_2: \ (x,,y,z) = (1,-1,6) + (-3,3,-6)s$$

descrivono la stessa retta.

Soluzione:

La retta $r_1$ ha direzione $\mathbf{v_1}(2,-2,4)$ e la retta $r_2$ ha direzione $\mathbf{v_2} = (-3,3,-6)$. Notiamo che i due vettori $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ hanno differente modulo e verso, ma stessa direzione (infatti $\mathbf{v_1} = -\frac{3}{2}\mathbf{v_2}$), quindi anche le rette $r_1$ e $r_2$ hanno la stessa direzione ovvero sono parallele. Ponendo per esempio $t = 0$ vediamo che la retta $r_1$ passa per il punto $A(1,1,2)$, basta ora verificare che tale punto appartiene anche a $r_2$. Infatti il sistema

$$\begin{cases} 1 - 3s = -1 \\ -1 + 3s = 1 \\ 6 - 6s = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{2}{3}$$

ha soluzione $s = \frac{2}{3}$, quindi $A$ appartiene anche alla retta $r_2$. Infine $r_1$ e $r_2$ sono due rette parallele con il punto $A$ in comune, ovvero sono coincidenti.

Notiamo che probabilmente sarebbe stato più semplice riscrivere dall'inizio le due rette nella forma

$$r_1: \ (x,,y,z) = (-1,1,2) + (1,-1,2)t \qquad r_2: \ (x,,y,z) = (1,-1,6) + (1,-1,2)s$$

Infatti i vettori $(2,-2,4)$, $(-3,3,-6)$ e $(1,-1,2)$ hanno la stessa direzione, quindi possono essere indifferentemente presi come vettore direzione per descrivere le rette $r_1$ e $r_2$.

□

**Esercizio 3.** Sia $r_1$ la retta di $\mathbb{R}^3$ passante per i punti $A(1,-1,2)$ e $B(-2,0,1)$, e sia $r_2$ la retta contenente $C(1,3,-3)$ e parallela al vettore $\mathbf{v_2} = (2,-2,3)$. Determinare la posizione reciproca delle due rette (cioè se sono incidenti, parallele o sghembe).

Soluzione:

La retta $r_1$ passa per $B$, ha direzione $\mathbf{v_1} = B - A = (-3, 1, -1)$ e quindi equazione parametrica:

$$r_1 : \ (x, y, z) = B + \mathbf{v_1}t = (-2, 0, 1) + (-3, 1, -1)t \ \Rightarrow \ r_1 : \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Analogamente la retta $r_2$ ha direzione $\mathbf{v_2} = (2, -2, 3)$ e quindi equazione parametrica:

$$r_2 : \ (x, y, z) = C + \mathbf{v_2}s = (1, 3, -3) + (2, -2, 3)s \ \Rightarrow \ r_2 : \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 3 - 2s \\ z = -3 + 3s \end{cases} \qquad \forall s \in \mathbb{R}$$

Osserviamo subito che $r_1$ e $r_2$ non sono parallele in quanto i vettori direzione $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ non hanno le componenti proporzionali uno rispetto all'altro: $\mathbf{v_1} \neq \lambda \, \mathbf{v_2}$.

Per stabilire se sono incidenti cerchiamo l'intersezione $r_1 \cap r_2$ risolvendo il sistema di tre equazioni nelle due incognite $t, s$:

$$\begin{cases} -2 - 3t = 1 + 2s \\ t = 3 - 2s \\ 1 - t = -3 + 3s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2 - 3(3 - 2s) = 1 + 2s \\ t = 3 - 2s \\ 1 - (3 - 2s) = -3 + 3s \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -7 + 6s = 1 + 2s \\ t = 3 - 2s \\ -2 + 2s = -3 + 3s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s = 2 \\ t = 3 - 2s \\ s = 1 \end{cases}$$

Poichè la prima e terza equazione si contraddicono il sistema non ammette soluzione e le rette non sono incidenti.

Infine le rette sono sghembe.

□

**Esercizio 4.** Nello spazio, si considerino le rette $r_1, r_2$ di equazioni

$$r_1 \ : \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad r_2 \ : \begin{cases} x = 2 + s \\ y = -s \\ z = 3 + s \end{cases}$$

Determinare la loro posizione reciproca.

Soluzione:

Le rette $r_1$ e $r_2$ hanno rispettivamente come vettore direzione i vettore $\mathbf{v_1}(3, -1, 1)$ e $\mathbf{v_2}(1, -1, 1)$. Di conseguenza $r_1$ e $r_2$ non sono parallele in quanto i vettori direzione $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ non hanno le componenti proporzionali uno rispetto all'altro: $\mathbf{v_1} \neq \lambda \, \mathbf{v_2}$.

Mettiamo a sistema $r_1$ e $r_2$ per calcolarne l'eventuale intersezione:

$$\begin{cases} 3t = 2 + s \\ 2 - t = -s \\ 1 + t = 3 + s \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} s = 3t - 2 \\ 2 - t = -3t + 2 \\ 1 + t = 3 + 3t - 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} s = -2 \\ t = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Il sistema è compatibile, quindi le rette sono incidenti. Sostituendo $t = 0$ nell'equazione di $r_1$, o analogamente $s = -2$ nell'equazione di $r_2$, si ottiene che le rette si intersecano nel punto $P(0, 2, 1)$.

□