Hoofdstuk II: bepaalde en onbepaalde integralen

www.karelappeltans.be

June 6, 2021

1 Bepaalde integraal

1.1 als Riemannsom

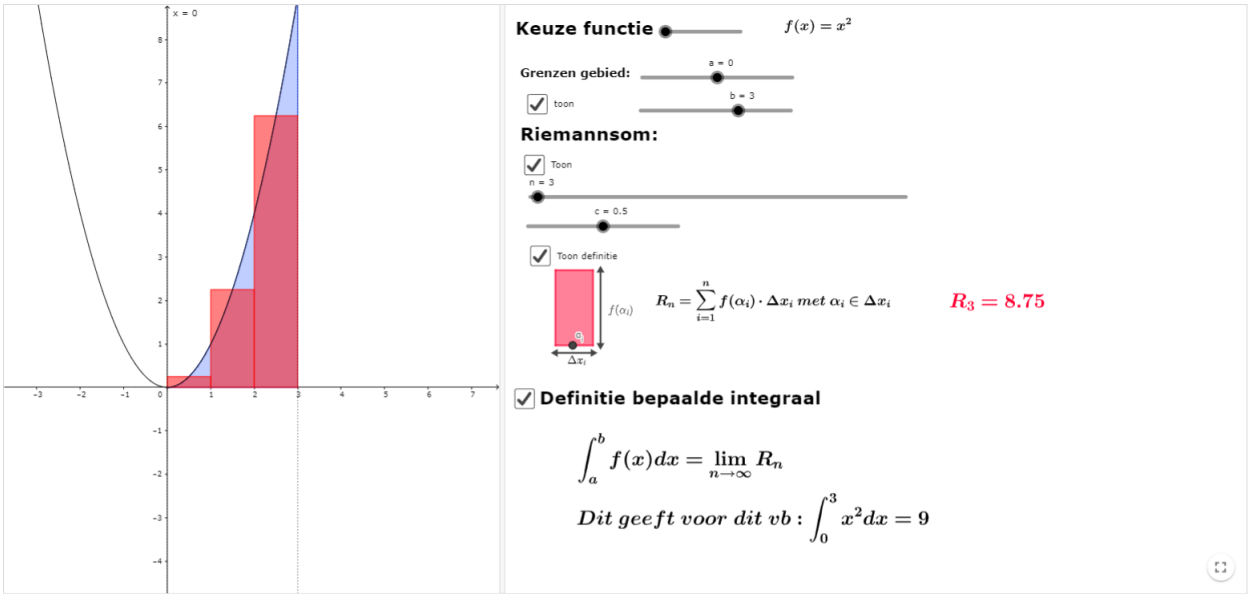


Figure 1: https://www.geogebra.org/m/CwjpD27v

1.2 als som van georiënteerde opp

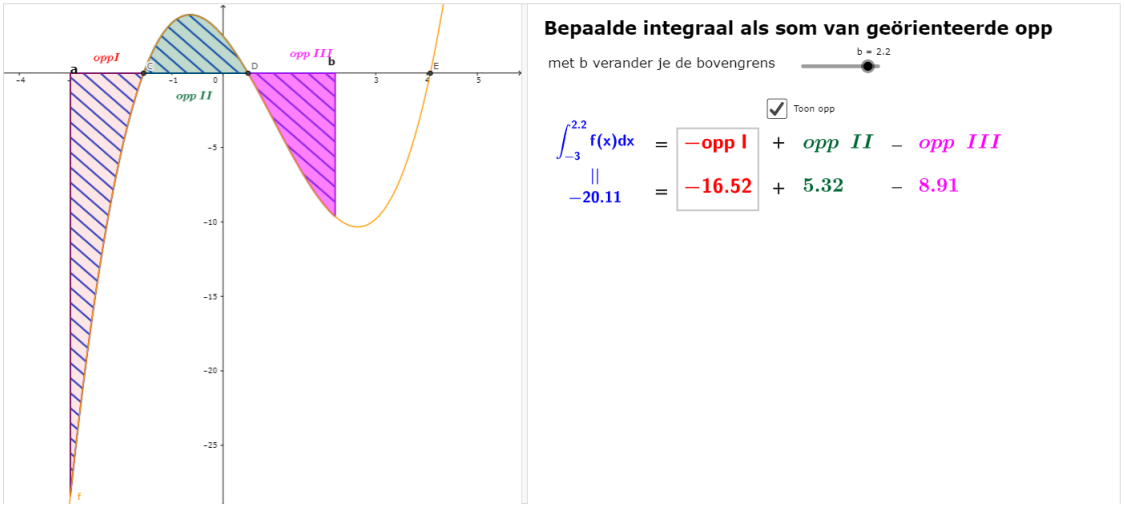


Figure 2: https://www.geogebra.org/m/CwjpD27v

2 Rekenregel bepaalde integraal

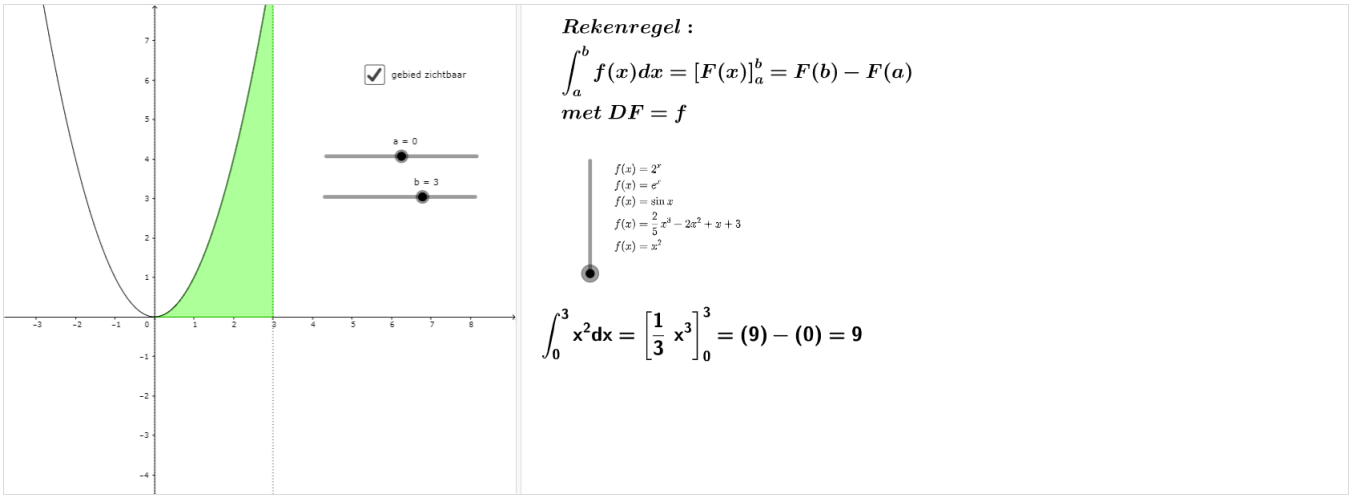


Figure 3: https://www.geogebra.org/m/k3jNteMx

3 Toepassingen bepaalde integraal

3.1 Oppervlakteberekening

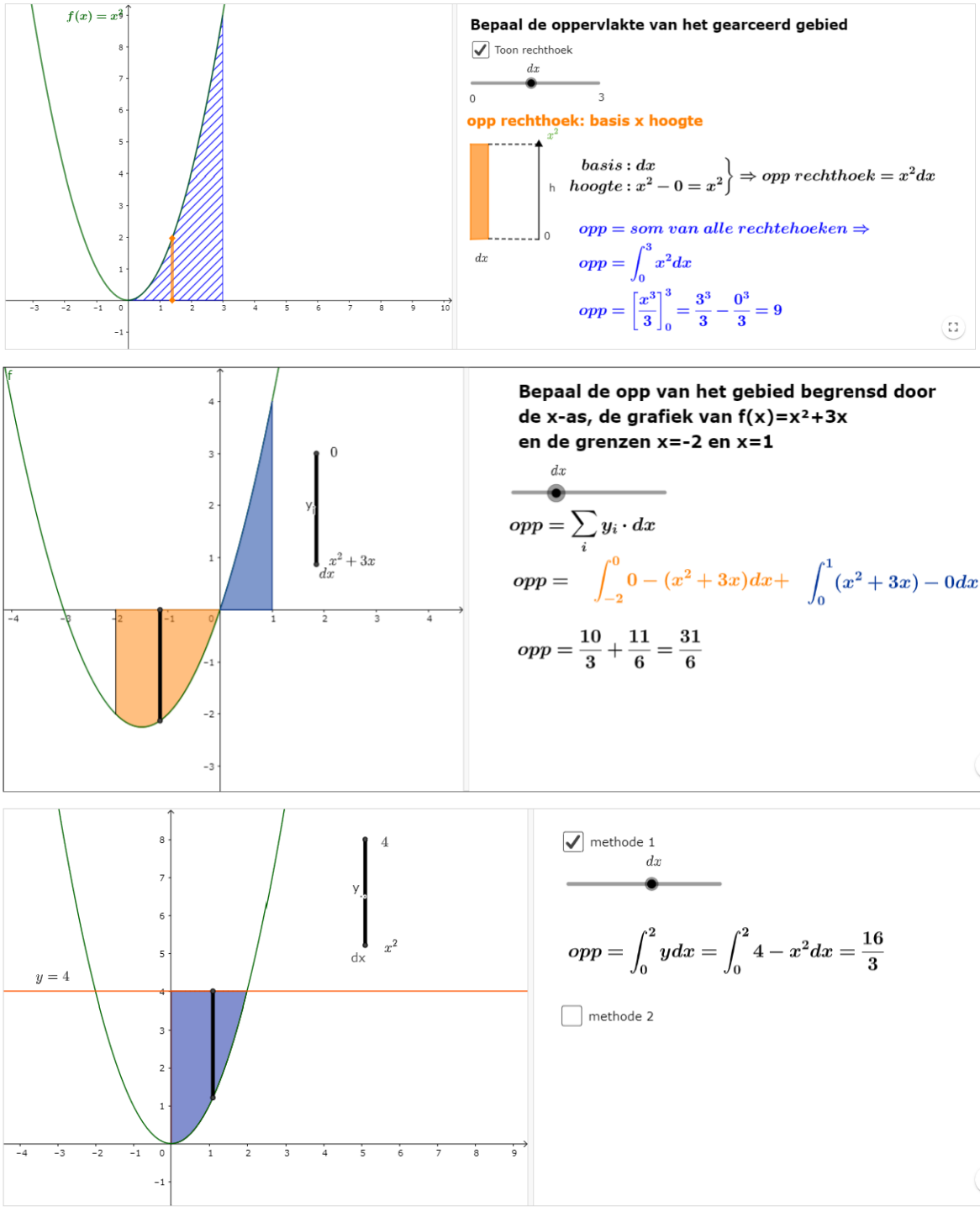


Figure 4: https://www.geogebra.org/m/QXvv6bTK

uitgewerkte voorbeeldoefening:

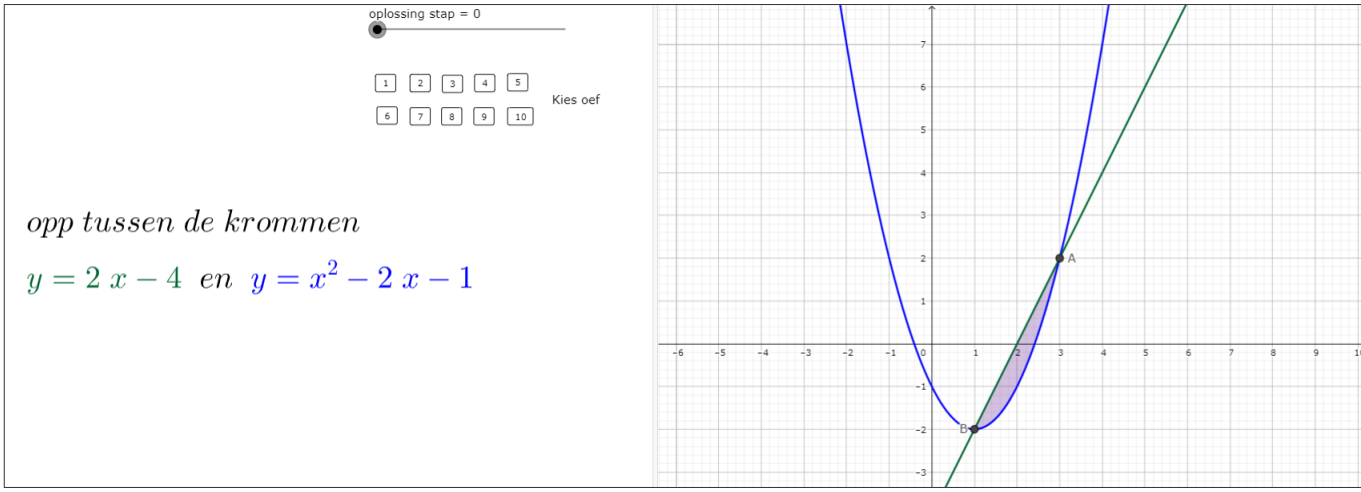


Figure 5: https://www.geogebra.org/m/QXvv6bTK

3.2 positie-snelheid-versnelling

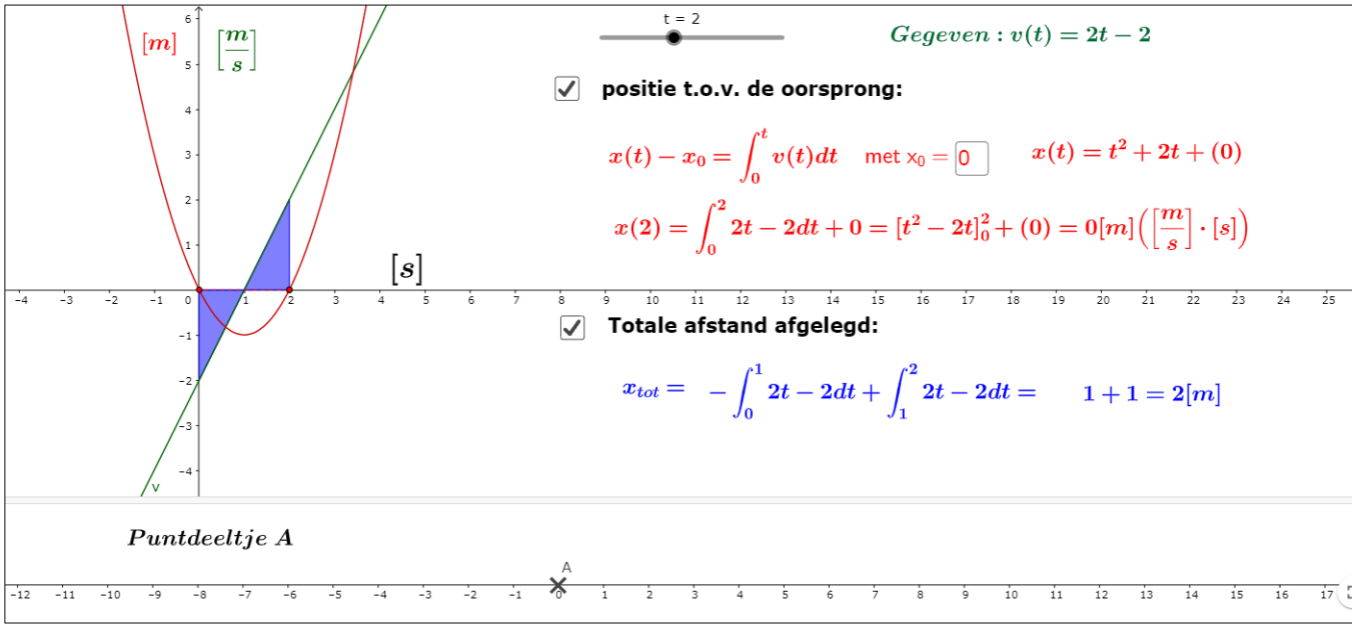


Figure 6: https://www.geogebra.org/m/vxxaKKUh

3.3 Economische toepassing:Consumer surplus en producer surplus

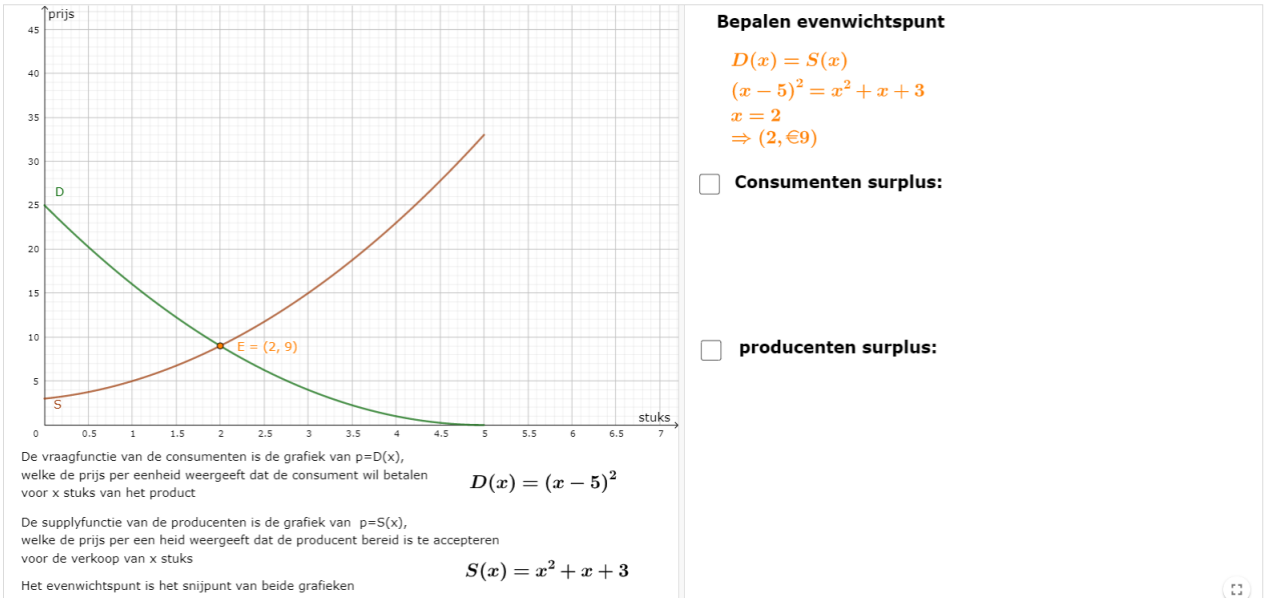


Figure 7: https://www.geogebra.org/m/d8kbjdv5

3.4 inhoudsberekening

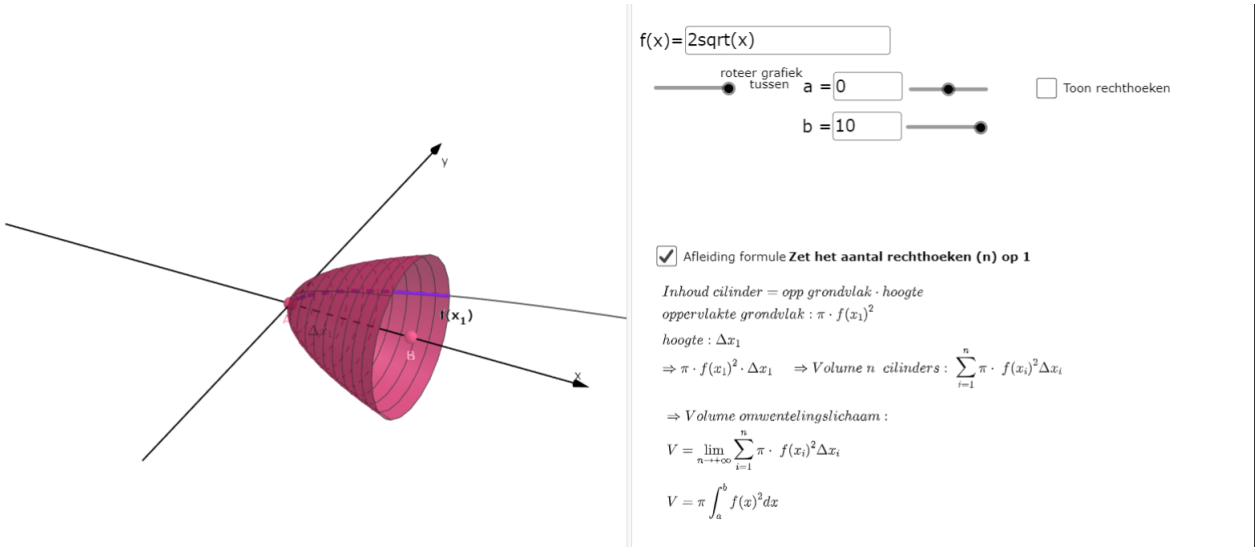


Figure 8: https://www.geogebra.org/m/b5DqDWuM

4 onbepaalde integraal

4.1 definitie

$\int f(x)dx = F(x) + C$ met $DF = f$

4.2 rekenregels

4.2.1 basisintegralen, integratie door splitsing

$$\int 0dx = c$$

$$\int 1dx = x + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \; (n \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$$

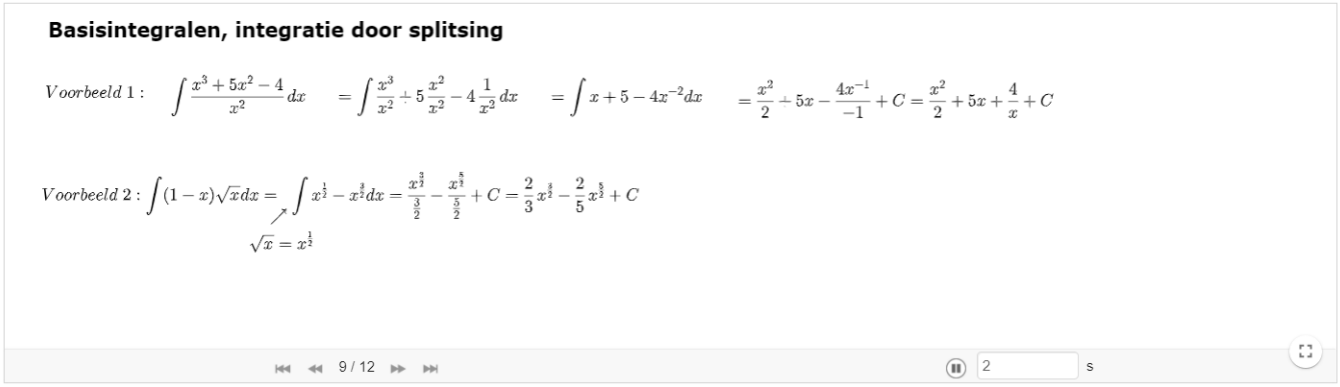


Figure 9: https://www.geogebra.org/m/RMwPMmq7

4.2.2 integratie door substitutie

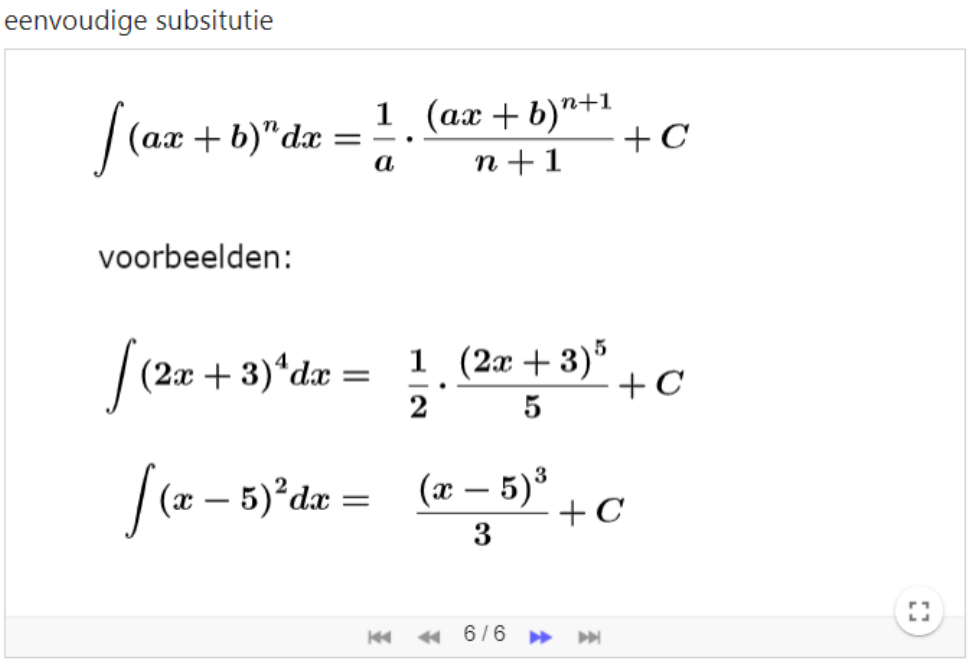


Figure 10: https://www.geogebra.org/m/RMwPMmq7

Integratie door substitutie: voorbeelden

Voorbeeld 1 : $\int (5x+1)^{10}dx = \int (5x+1)^{10}dx = \frac{1}{5}\int u^{10}du = \frac{1}{5}\cdot\frac{u^{11}}{11}+c = \frac{(5x+11)^{11}}{55}+c$

$u = 5x+1$
$du = 5dx$
$\frac{1}{5}du = dx$

Voorbeeld 2 : $\int \frac{x+2}{\sqrt[5]{x^2+4x+5}}dx = \int \frac{x+2}{\sqrt[5]{x^2+4x+5}}dx = \int \frac{\frac{1}{2}du}{\sqrt[5]{u}} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{5}}du = \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}}+c = \frac{5}{8}\sqrt[5]{(x^2+4x+5)^4}+c$

$u = x^2+4x+5$
$du = (2x+4)dx = 2(x+2)dx$
$\frac{1}{2}du = (x+2)dx$

Voorbeeld 3 : $\int 2x\cdot e^{x^2}dx = \int 2xe^{x^2}dx = \int e^u du = e^u+c = e^{x^2}+c$

$u = x^2$
$du = 2xdx$

Voorbeeld 4: $\int \frac{lnx}{x}dx = \int \frac{lnx}{x}dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2}+c = \frac{(\ln x)^2}{2}+c$

$u = lnx$
$du = \frac{1}{x}dx$

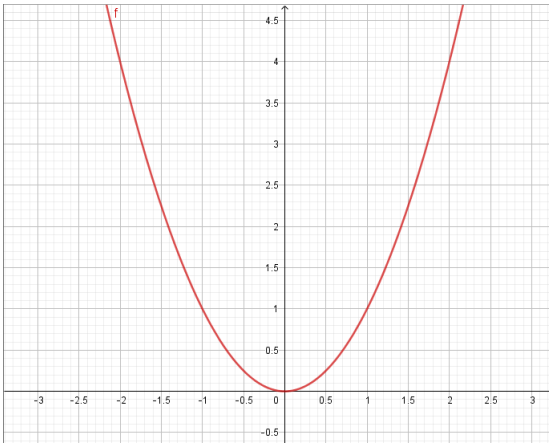
Figure 11: https://www.geogebra.org/m/RMwPMmq7

5 oefeningen

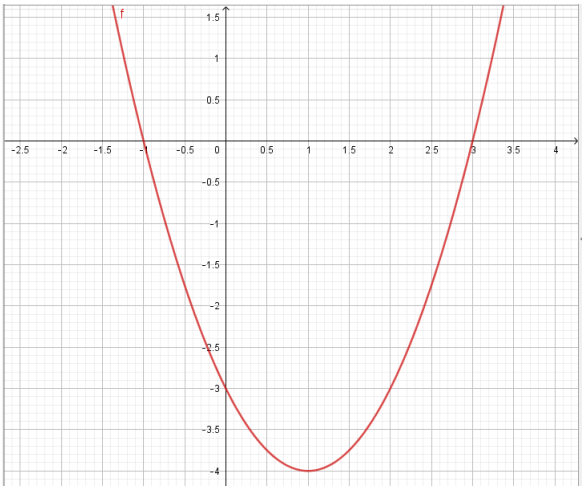
5.1 Riemannsommen

Bereken en teken de gevraagde Riemannsommen

1. R_3 bij $f(x) = x^2$ over het interval $[-1, 2]$



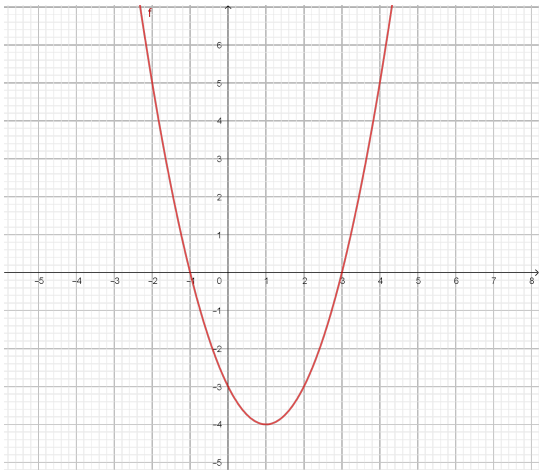
2. R_2 bij $f(x) = x^2 - 2x - 3$ over het interval $[0, 2]$



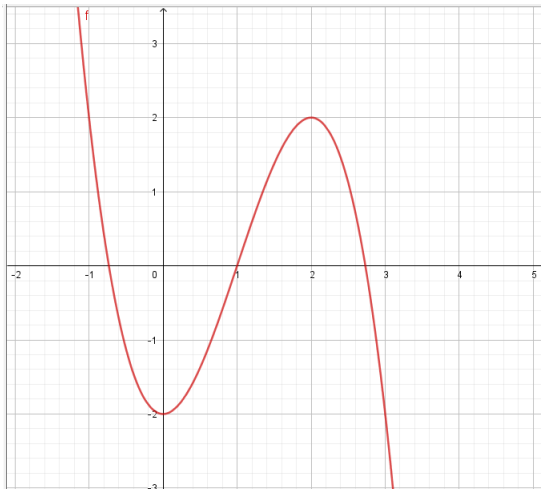
5.2 geörienteerde oppervlakten

1. Schrijf volgende integralen als een som van geörienteerde oppervlakten

   (a) $\int_{-2}^{4} x^2 - 2x - 3dx$

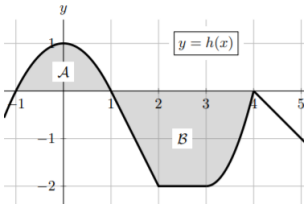


   (b) $\int_{-1}^{3} -x^3 + 3x^2 - 2dx$



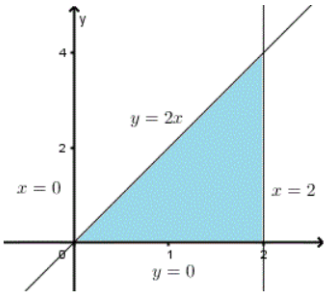
2. Als $\int_{-2}^{4} f(x)dx = 11$ en $f(x) = 7$ op $[4, 6]$, bereken dan $\int_{-2}^{6} f(x)dx$

3. Bereken $\int_{-1}^{4} h(x)dx$ met oppA$=\frac{4}{3}$ en oppB$=\frac{11}{3}$

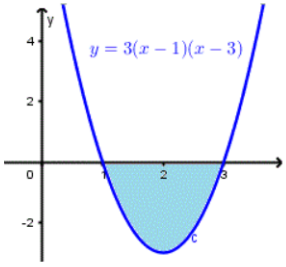


5.3 Oppervlakte berekening

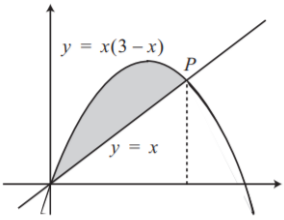
1. Bereken de gekleurde oppervlakte



(a)

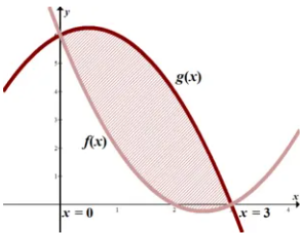


(b)



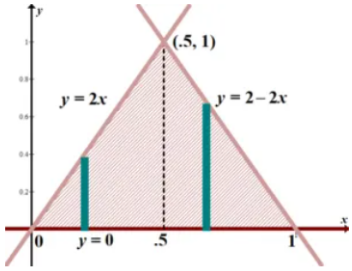
(c)

$f(x) = x^2 - 5x + 6$
$g(x) = -x^2 + x + 6$

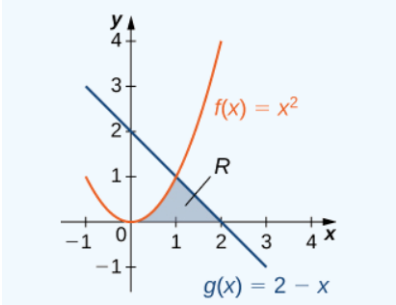


(d)

(e)



(f)



2. Bereken de oppervlakte van:

   (a) de driehoek begrensd door $y = 4 - 3x$ en de assen

   (b) het gebied begrensd door de kromme $y = \sqrt{x}$, de rechte $x = 4$ en de x-as.

   (c) het gebied begrensd door de kromme $y = 1 - x^2$ en de x-as.

   (d) het gebied in het eerste kwadrant begrensd door $y = 4 - x^2$ en de rechten $y = 3x$ en $y = 0$

   (e) het gebied begrensd door de kromme $y = \sqrt{x}$ en de rechten $y = 2 - x$ en $y = 0$

   (f) het gebied ingesloten door de grafiek van $f(x) = -x^2 + 3x$ en de x-as

   (g) het gebied ingesloten door de grafiek van $f(x) = x^2$ en de grafiek van $f(x) = x$

   (h) het gebied begrens door de kromme $y = x^3$ en de rechte $y = x$

5.4 Inhoud omwentelingslichaam

1. Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het vlakdeel, begrensd door de kromme $y = 5x^2$, de x-as en de rechten $x = 1$ en $x = 2$, te wentelen om de x-as

2. Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door de driehoek gelegen tussen de assen en de rechte $y = 5x - 15$ te wentelen om de x-as

3. Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door de figuur, begrensd door de kromme $y^2 = 4x$ en de rechte $x = 4$, te wentelen om de x-as

4. Beschouw de figuur, begrensd door de parabool $y = x^2$ en de rechten $y = 0$ en $x = 3$

   (a) Men laat deze figuur wentelen om de x-as. Bepaal de inhoud van het ontstane lichaam

   (b) Men laat deze figuur wentelen om de y-as. Bepaal de inhoud van het ontstane lichaam

5.5 Economische toepassingen

1. Bereken het consumer surplus en het producer surplus bij het evenwichtspunt

   (a) $D(x) = -\frac{5}{6}x + 9$ en $S(x) = \frac{1}{2}x + 1$

   (b) $D(x) = (x - 4)^2$ en $S(x) = x^2 + 2x + 6$

   (c) $D(x) = (x - 6)^2$ en $S(x) = x^2$

   (d) $D(x) = (x - 3)^2$ en $S(x) = x^2 + 2x + 1$

2. De marginale kost voor het produceren van goedkope digitale fototoestellen wordt (bij benadering) gegeven door $K'(q) = 0.09q^2 - 2q + 50$ waarbij q het aantal geproduceerde toestellen per uur voorstelt

   (a) Bereken de kostenfunctie K(q) als het bedrijf 1000 euro nodig heeft om de productie te starten

   (b) Bereken de extra kosten bij een productieverhoging van 20 naar 30 toestellen per uur door gebruik te maken van integralen.

3. Bij de firma Taktik worden projectieklokken geproduceerd. De marginale kost wordt benaderd door $K'(q) = 3q^2 - 30q + 73$ en de marginale winst door $W'(q) = -3q^2 + 30q - 48$ waarbij q het aantal klokken voorstelt dat per uur geproduceerd wordt. De vaste kosten bedragen 15 euro.

   (a) Bereken de kostenfunctie K(q)

   (b) Hoeveel kost 1 projectieklok in de winkel?

   (c) Bereken de winstfunctie W(q)

   (d) Hoeveel klokken per uur moet de firma produceren om een maximale winst te hebben? Hoeveel bedraagt die maximale winst?

5.6 wetenschappen

1. Een voorwerp verplaatst zich rechtlijnig met een snelheid v(t). We stellen dat het voorwerp zich op x_0 m bevindt na 0 s.

   (a) Druk de positie van het voorwerp t.o.v. de waarnemer in functie van de tijd uit. Bereken de positie na 5 s.

   (b) Bereken de totaal afgelegde weg na 5 sec.

   i $v(t) = 3t - 2$ en $x_0 = 10$
   ii $v(t) = 5t^2$ en $x_0 = 5$
   iii $v(t) = t^2 + 3t - 4$ en $x_0 = 0$

5.7 onbepaalde integralen

1. Bereken de volgende onbepaalde integralen

   (a) $\int x^{17} dx$
   (b) $\int 3dx$
   (c) $\int \frac{3}{x^{10}} dx$
   (d) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$
   (e) $\int \sqrt{x} dx$
   (f) $\int 3x^2 + 5x - 9dx$
   (g) $\int x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{2}{3}} + 6dx$
   (h) $\int (1 - x)\sqrt{x} dx$
   (i) $\int \frac{x^2 - 1}{x^2} dx$
   (j) $\int (3x + 1)(x - 6) dx$
   (k) $\int p^4 - 3p + 5dp$

2. Bereken de volgende onbepaalde integralen door eenvoudige substitutie

   (a) $\int (x - 6)^9 dx$
   (b) $\int (5x - 3)^6 dx$
   (c) $\int (3 - 2x)^8 dx$
   (d) $\int \sqrt{2x - 3} dx$

(e) $\int \sqrt{4x-1}dx$

3. Uitbreiding: bereken de volgende onbepaalde integralen door substitutie

(a) $\int (2x+3)(x^2+3x+4)^5 dx$

(b) $\int 2x\, e^{x^2+1} dx$

(c) $\int \frac{x+1}{d} x$

(d) $\int (3x^2+4x+5)(x^3+2x^2+5x-6)^{-2} dx$