Verloop van functies m.b.v. afgeleide beschrijven

www.karelappeltans.be

April 27, 2021

1 Praktijkvoorbeeld

Hoe kan de grafiek van $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ bekomen worden m.b.v. de afgeleide functie?

2 Middelwaardestelling (van Lagrange)

Stel dat f continue is op een gesloten interval $[a,b]$ en afleidbaar op het open interval $]a,b[$. Dan bestaat er minstens een $c \in]a,b[$ zodat

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Bewijs: /

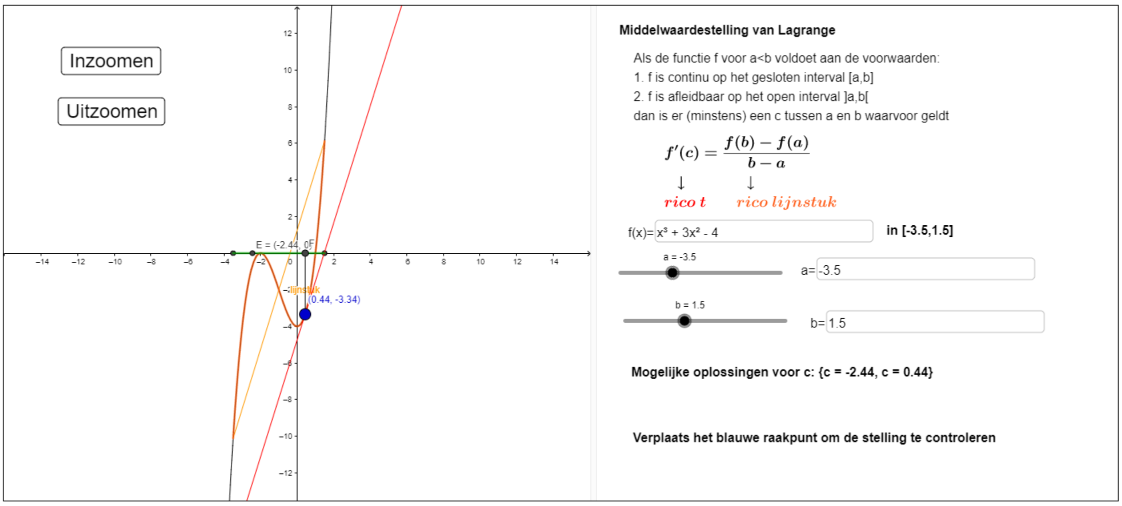


Figure 1: https://www.geogebra.org/m/dKUFet34

3 Stelling van Rolle

Stel dat f continue is op een gesloten interval $[a,b]$ en afleidbaar op het open interval $]a,b[$ met $f(a) = f(b)$, dan bestaat er minstens een $c \in]a,b[$ zodat

$$f'(c) = 0$$

Bewijs: We gebruiken de middelwaardestelling. Omdat $f(a) = f(b)$ geldt ook $f(a) - f(b) = 0$ en dit bewijst de stelling.

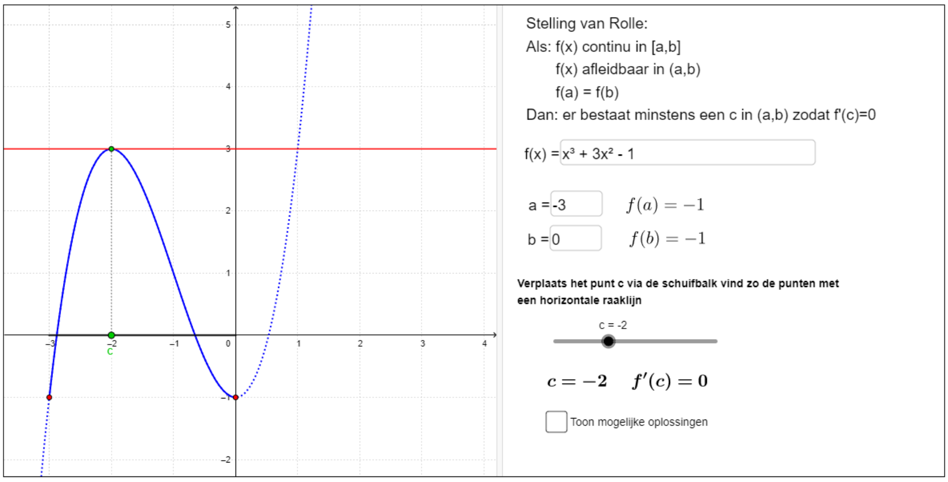


Figure 2: https://www.geogebra.org/m/dKUFet34

4 Definitie stijgend/dalend

We zeggen dat een functie stijgend op een interval I is indien

$$f(c) \leq f(d), \quad \forall c < d, \quad c, d \in I$$

.
De functie wordt dalend genoemd op een interval I indien

$$f(c) \geq f(d), \quad \forall c < d, \quad c, d \in I$$

.
Ze heten monotoon dalend/stijgend indien men $\geq$ ($\leq$) door $>$ ($<$) kan vervangen.

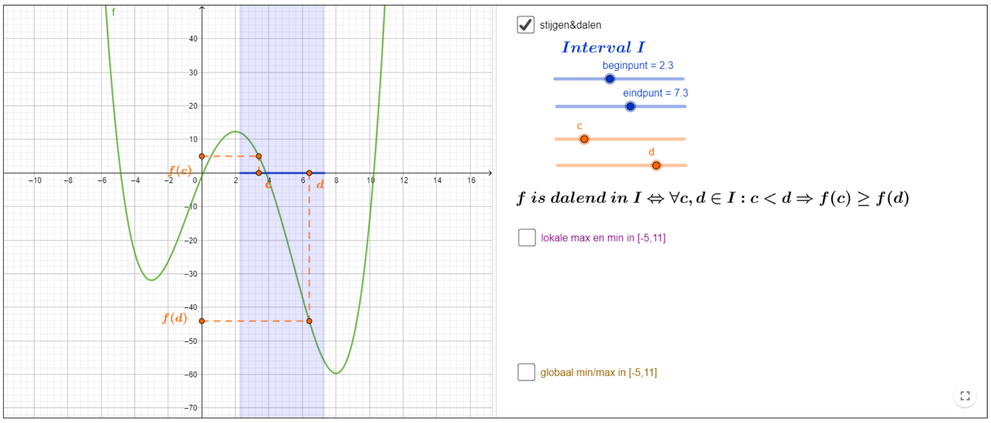


Figure 3: https://www.geogebra.org/m/jsrkdf7v

5 Stelling

Voor een dalende functie f in een open interval I die alsook afleidbaar is, geldt $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$. Indien de functie stijgend is, geldt $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$.

Bewijs: We bewijzen dit voor een stijgende functie. stel dat $x \in I$ en een kleine h zodat $x + h$ nog steeds tot het interval I behoort (dat gaat omdat we geëist hebben dat I open is), dan geldt

$$voor\ h > 0 : \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0,$$

$$voor\ h < 0: \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0.$$

Omdat de functie afleidbaar is bestaat de $\lim\limits_{h\to 0}$ bijgevolg $f'(x) \geq 0$

6 Stelling

Stel dat $f \in C^1(\mathbb{R})$. Indien voor een open interval I geldt

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in I,$$

dan is de functie f monotoon stijgend. ($f'(x) < 0$: monotoon dalend.)
Bewijs: /

7 Praktijk

We maken een tekentabel van de 1ste afgeleide:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0\ of\ x = -2$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		↗		↘		↗	

8 Definitie lokaal extremum (lokaal min of lokaal max)

We noemen een punt $\overline{x}$ een lokaal minimum (respectievelijk maximum) indien een getal $\delta > 0$ bestaat zodat $f(\overline{x}) < f(x)$ (respectievelijk $f(\overline{x}) > f(x)$ voor alle $x \in]\overline{x}-\delta, \overline{x}+\delta[\setminus\{\overline{x}\}$

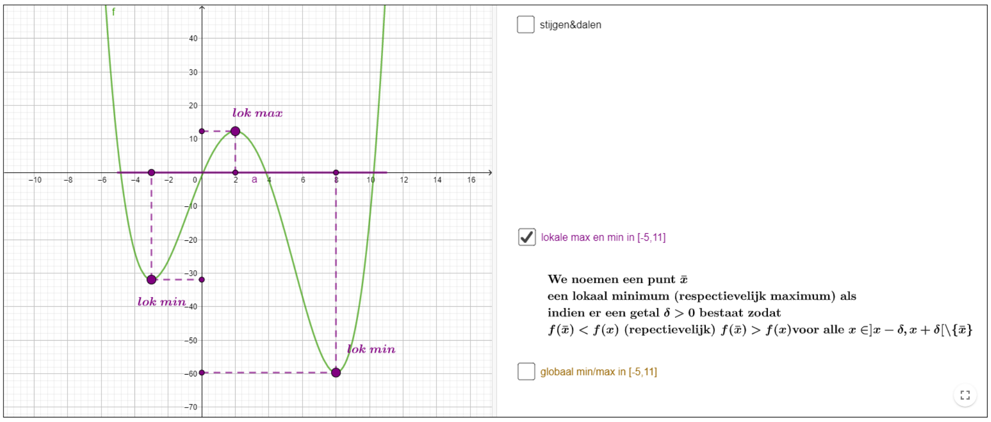


Figure 4: https://www.geogebra.org/m/jsrkdf7v

9 Stelling

Stel dat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een afleidbare functie is met een lokaal minimum of een lokaal maximum $\overline{x}$. Dan geldt $f'(\overline{x}) = 0$

10 Opmerking

Uit $f'(\overline{x}) = 0$ volgt niet dat $\overline{x}$ een lokaal extremum is. Beschouw bijvoorbeeld $f(x) = x^3$. Deze heeft geen minimum en geen maximum. Er geldt echter $f'(0) = 0$

Hoe kan men dan bepalen of een punt waar $f'(\overline{x}) = 0$ een extremum is?

11 Stelling

Stel dat f continu is in a. Bij een tekenwissel van $f'(x)$ heeft $f(x)$ in a

- Bij + − een lokaal maximum
- Bij − + een lokaal minimum

Merk op:

1. $f'(x)$ moet dus in dat punt niet bestaan (meestal wel)
2. Als er GEEN tekenwissel van f' is in a, is er dus geen lokaal minimum of maximum

12 praktijk

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		↗	lok max	↘	lok min	↗	

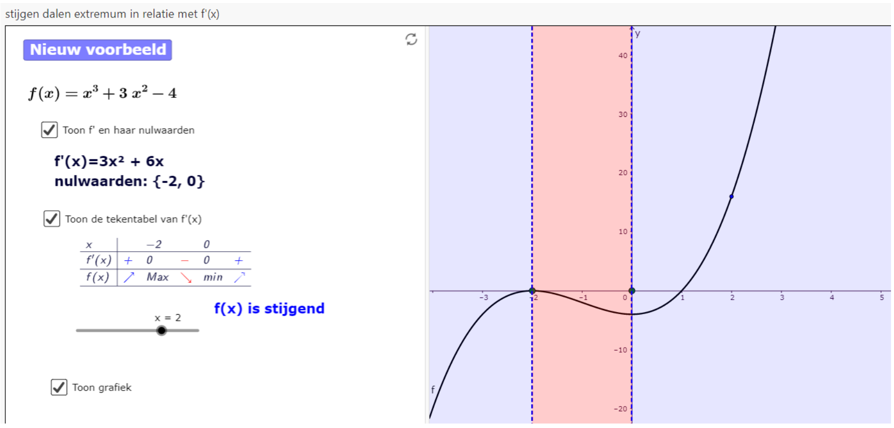


Figure 5: https://www.geogebra.org/m/jsrkdf7v

13 Stelling: tweede afgeleide test

Stel dat $f \in C^2(\mathbb{R})$ een functie is met een punt $\overline{x}$ waarvoor geldt dat $f'(\overline{x}) = 0$. Stel bovendien dat $f''(\overline{x}) > 0$. Dan is $\overline{x}$ een lokaal minimum. (Indien $f''(\overline{x}) < 0$ is $\overline{x}$ een lokaal maximum.)

14 praktijk

We maken een tekentabel van de 2de afgeleide:

$$f''(x) = 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow 6(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	-	-	0	+	
f''(x)		-	-	-	0	+	+	+	
f(x)		↗	l. max	↘		↘	l. min	↗	

15 Definitie hol en bol

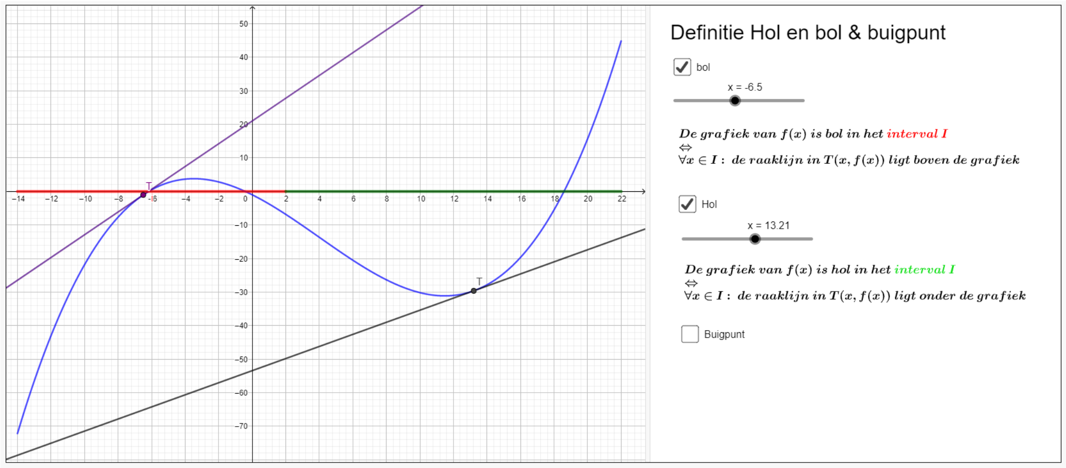


Figure 6: https://www.geogebra.org/m/jsrkdf7v

16 Stelling

Stel dat $f \in C^2(\mathbb{R})$. De grafiek van een functie f is hol op een interval I indien $f''(x) > 0,\ \forall x \in I$. Ze is bol indien $f''(x) < 0,\ \forall x \in I$

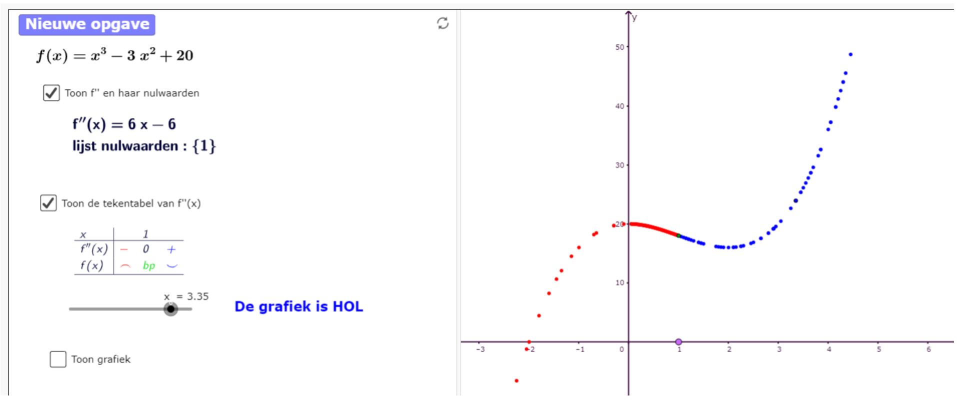


Figure 7: https://www.geogebra.org/m/jsrkdf7v

17 praktijk

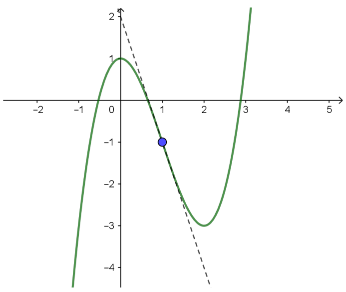
x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	-	-	0	+	
f''(x)		-	-	-	0	+	+	+	
f(x)		↗	l. max	↘		↘	l. min	↗	

18 Definitie buigpunt

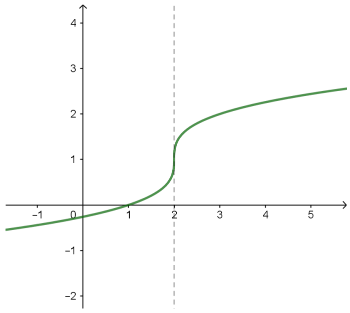
Het punt waar een functie lokaal van convex (hol) naar concaaf (bol) of vice versa verandert wordt

- een buigpunt genoemd indien de raaklijn in dat punt bestaat($f'(x) \in \mathbb{R}$ of $f'(x) = \infty$. De raaklijn snijdt dan de grafiek in dit punt.
- een knikpunt genoemd als linker-en rechterafgeleide bestaan, maar verschillend zijn van elkaar.

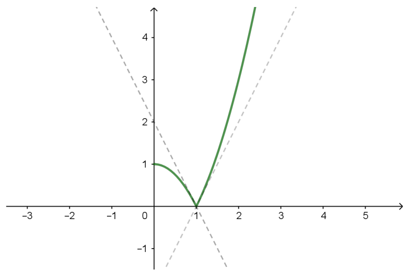
Indien f twee keer afleidbaar is, wordt de tweede afgeleide nul in een buigpunt.



(a) buigpunt



(b) buigpunt verticale raaklijn



(c) knikpunt

19 praktijk

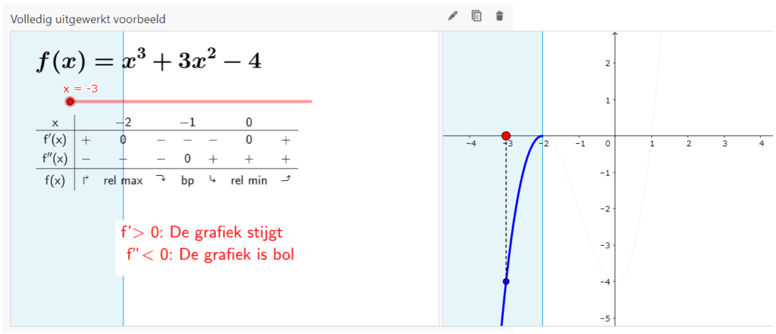


Figure 9: https://www.geogebra.org/m/jsrkdf7v

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	-	-	0	+	
f''(x)		-	-	-	0	+	+	+	
f(x)		↷	l. max	⤵	bp	↳	l. min	⤴	

20 Oefeningen

1. Ga na dat aan alle voorwaarden van de stelling van Lagrange moet voldaan zijn zodat c, waarvan sprake, zou kunnen bestaan.
2. Voldoet $f(x) = \frac{1}{x}$ over het interval $[-1,1]$ aan de stelling van Lagrange?
3. Voldoet $f(x) = |x|$ over $[-2,2]$ aan de voorwaarden van de stelling van Rolle?
4. Toon aan dat $f(x) = \sin(2\pi x)$ voldoet aan de stelling van Rolle over het interval $[-1,1]$
5. Toon aan dat $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x}$ over het interval $[0,4]$ voldoet aan de stelling van Rolle en bepaal alle waarden van c in $]0,4[$ waarvan sprake in deze stelling (A. c=1)
6. Gegeven $f(x) = x^2 - 5x + 1$ Leg de middelwaardestelling van Lagrange grafisch uit. Gebruik hiervoor het interval $[0,2]$.
7. Bekijk $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ over het interval $[3,5]$. Voldoet f aan de stelling van Lagrange? Zo ja, bepaal de waarde(n) van c waarvan sprake. (A. ja, $c = -\sqrt{5}$)
8. Zij $f \in C^1(\mathbb{R})$. Veronderstel dat $f(0) = -3$ en dat $f'(x) \leq 5\ \forall x \in \mathbb{R}$. Toon aan dat $f(2) \leq 7$.
9. Bewijs dat $f(x) = x^3 + x - 1$ juist één nulpunt heeft in het interval $[0,1]$
10. Zelfde vraag voor $f(x) = x^{13} + 7x^3 - 5$
11. Toon aan dat tussen twee nulpunten van $f(x) = sin(x)$ een nulpunt van $f(x) = cos(x)$ ligt.
12. Toon aan dat de vergelijking $1 - 2x = \sin(x)$ juist één oplossing heeft
13. zij $f(x) = \tan x - x$. Bepaal $f(0)$ en gebruik $f'(x)$ om aan te tonen dat $\tan x > x\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
14. Toon aan dat $\sin(x) \leq 1,2x\ \forall x \geq 0$
15. Bepaal de eventuele extrema van $f(x) = |x^2 - 1|$
16. Als f een continue afgeleide heeft in het interval $[-5,10]$ met $f'(-5) = -1$ en $f'(10) = 1$, welke van onderstaande uitspraken geldt dan zeker:
    (a) f is stijgend op $[-5,10]$
    (b) $f(c) = 0$ voor een $c \in]-5,10[$
    (c) f is hol in het interval $[-5,10]$
    (d) De grafiek van f heeft in VA in dit interval
    (e) De grafiek van f heeft een horizontale raaklijn in dit interval
17. Als $f'(x) = (x-2)^2(x+4)^7x^4$ dan is f dalend in volgend interval:
    (a) $]0,2[$
    (b) $]2,+\infty[$
    (c) $]-\infty,-4[$
    (d) $]-4,0[$
    (e) Het juiste interval is niet gegeven
18. Juist of fout. Indien juist verwijs naar de juiste plaats in het dictaat. Indien fout, geef een tegenvoorbeeld:
    (a) Indien f een extremum heeft voor $x = p$, dan is $f'(p) = 0$
    (b) Indien f afleidbaar is en $f'(p) = 0$, dan bereikt f een relatief extremum voor $x = p$
    (c) Indien f dalend is in $[a,b]$ dan is $f'(x) < 0$ voor elke x in $[a,b]$
    (d) als f stijgend is in $[a,b]$ en f is afleidbaar in $[a,b]$ dan geldt $f'(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,b]$
    (e) als $P(c, f(c))$ een buigpunt is van de grafiek van f, dan geldt $f''(c) = 0$.
    (f) Als voor een functie f geldt $f'(x) \leq 0,\ \forall x \in]a,b[$, dan is f dalend in $[a,b]$

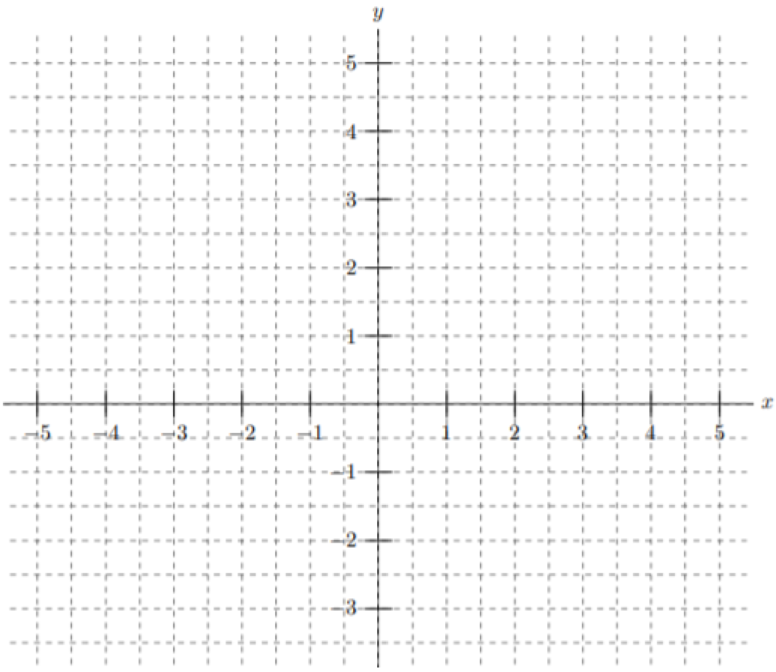
(g) Als voor twee afleidbare functies $f(x)$ en $g(x)$ geldt dat $f(x) \le g(x)$, dan geldt ook $f'(x) \le g'(x)$

19. Schets een grafiek die aan onderstaande voorwaarden voldoet:

On the axes provided below, sketch the graph of a single function $y = h(x)$ satisfying all of the following:

- $h(x)$ is defined for all x in the interval $-5 < x < 5$.
- $h'(x) > 0$ for all $x < -3$.
- $\lim_{x \to -2} h(x) = 0$.
- $h(-2) = -3$.
- The average rate of change of $h(x)$ between $x = -1$ and $x = 1$ is 2.
- $h(1) = 2$.
- $h(x)$ is linear between $x = 1$ and $x = 3$.
- $h'(2) = -1$.
- $\lim_{x \to 4^-} h(x) = -1$.
- $\lim_{x \to 4} h(x)$ does not exist.
- $h'(x) < 0$ for all $x > 4$.

Make sure that your sketch is large and unambiguous.



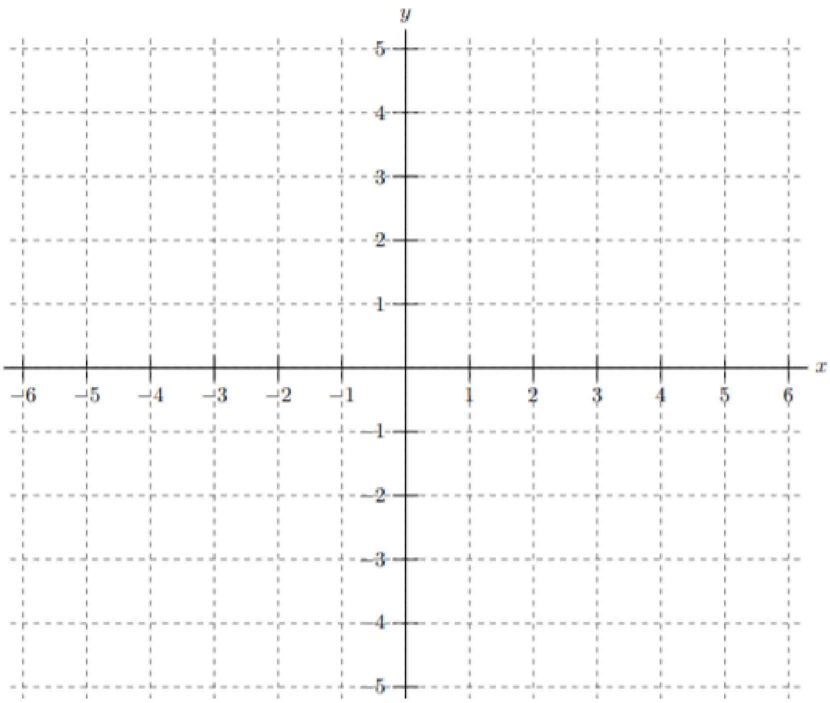
20. Schets een grafiek die aan onderstaande voorwaarden voldoet:

On the axes provided below, sketch the graph of a single function $y = g(x)$ satisfying all of the following:

- $g(x)$ is defined for all x in the interval $-6 < x < 6$.
- $g(x)$ has at least 5 critical points in the interval $-6 < x < 6$.
- The global maximum value of $g(x)$ on the interval $-5 \leq x \leq -3$ is 4, and this occurs at $x = -4$.
- $g(x)$ is not continuous at $x = -2$.
- $g'(x)$ (the derivative of g) has a local maximum at $x = 0$.
- $g(x)$ is continuous but not differentiable at $x = 1$.
- $g''(x) \geq 0$ for all x in the interval $2 < x < 4$.
- $g(x)$ has at least one local minimum on the interval $4 < x < 6$ but does not have a global minimum on the interval $4 < x < 6$.
- $g(x)$ has an inflection point at $x = 5$.

Make sure your sketch is large and unambiguous.

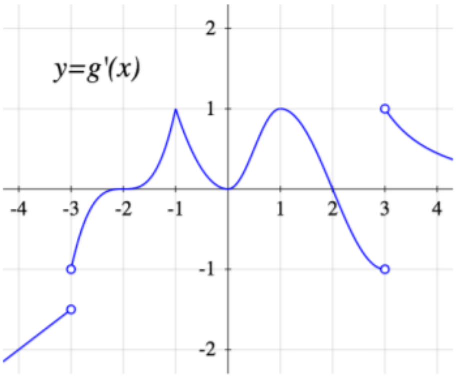
Graph of $y = g(x)$



21. Beantwoord volgende vragen over de grafiek van g(x) aan de hand van de grafiek van g'(x):

3. *[6 points; 1 points per part.]* **You do not have to justify your answers to this question.**

The function g has domain $\mathbb{R}$ and is continuous. Below is the graph of **its derivative** g':



Note: the following questions are about g, but the graph is for the derivative g'.

Decide whether the function g has a local maximum, a local minimum, an inflection point, or nothing, at the points with each of the following x-coordinates:

(a) at $x = -3$	**Circle one:** Local max Local min Inflection point Nothing
(b) at $x = -2$	**Circle one:** Local max Local min Inflection point Nothing
(c) at $x = -1$	**Circle one:** Local max Local min Inflection point Nothing
(d) at $x = 0$	**Circle one:** Local max Local min Inflection point Nothing
(e) at $x = 2$	**Circle one:** Local max Local min Inflection point Nothing
(f) at $x = 3$	**Circle one:** Local max Local min Inflection point Nothing