Continuïteit

www.karelappeltans.be

March 27, 2026

1 Inleiding

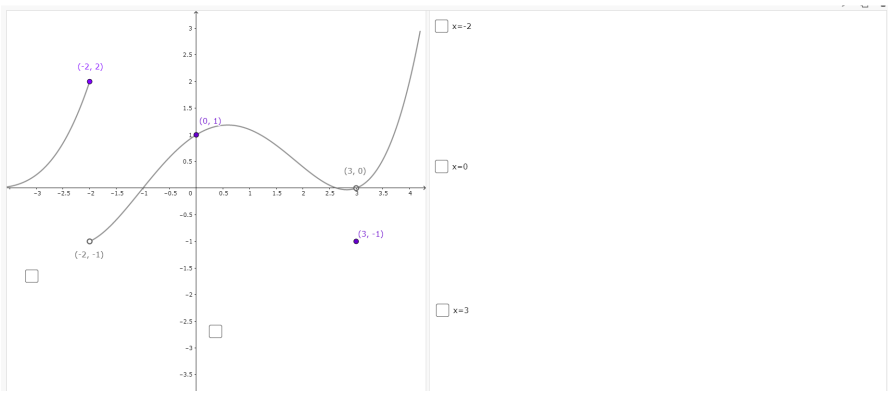


Figure 1: https://www.geogebra.org/m/Mcny7uY8

2 Definitie continuïteit in een punt

Een functie f, gedefiniëerd op een open interval I dat het punt a bevat, wordt continu genoemd in het punt a als $\lim_{x \to a} = f(a)$

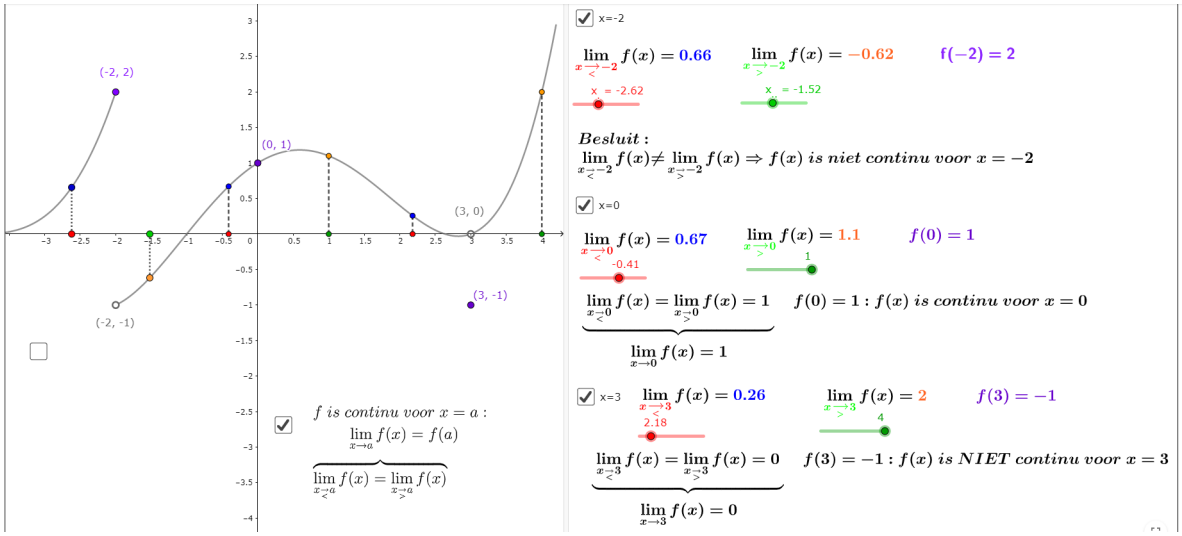


Figure 2: https://www.geogebra.org/m/Mcny7uY8

3 Definitie continuïteit over een interval

Een functie $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ noemen we continu over I als $\forall a \in I$ f is continu voor $x = a$ (in de randpunten van een gesloten interval I , volstaat links of rechtscontinu)

4 Definitie m.b.v. rijen

$$\textit{Een functie } f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \textit{ noemen we continu in } a \in I \textit{ als}$$
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$
$$\Updownarrow$$
$$\textit{als voor elke rij } x_n \textit{ die naar } a \textit{ convergeert, geldt dat } f(x_n) \textit{ naar } f(a) \textit{ convergeert}$$

5 Eigenschappen

1. We noemen een functie discontinu voor $x = a$ als zij in dat punt niet continu is.
2. Elke gekende functie is continu in haar domein.
3. Alle gekende samenstellingen van continue functies geven een continue functie.

6 Stellingen

6.1 Extreme Waarden Stelling

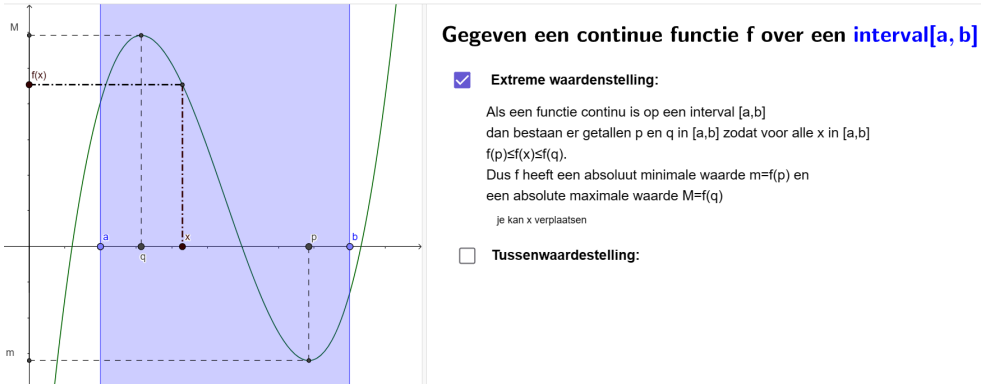


Figure 3: https://www.geogebra.org/m/JB4EXb85

6.2 Tussenwaarde stelling

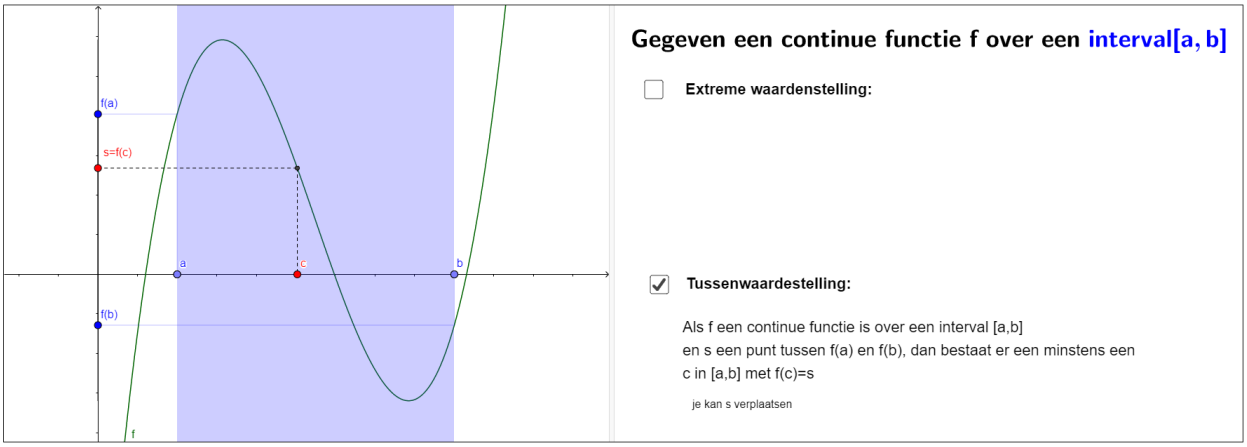


Figure 4: https://www.geogebra.org/m/JB4EXb85

6.3 Stelling van Bolzano

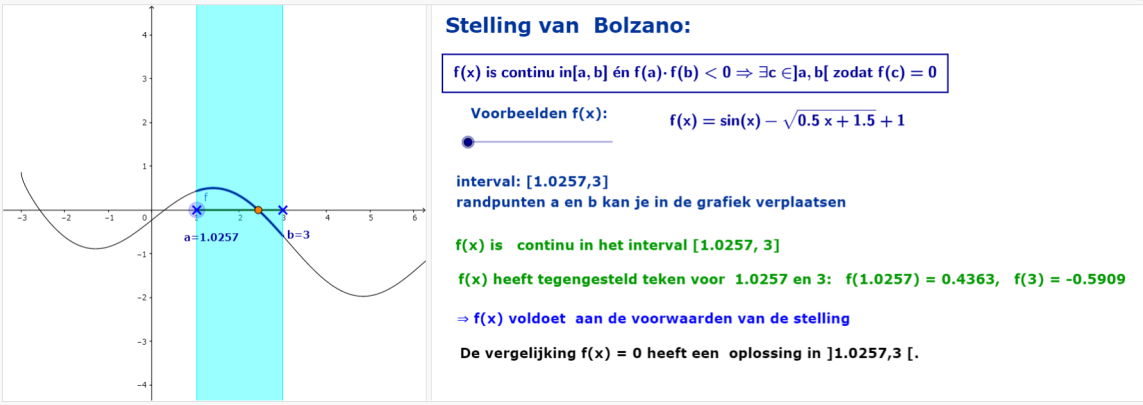
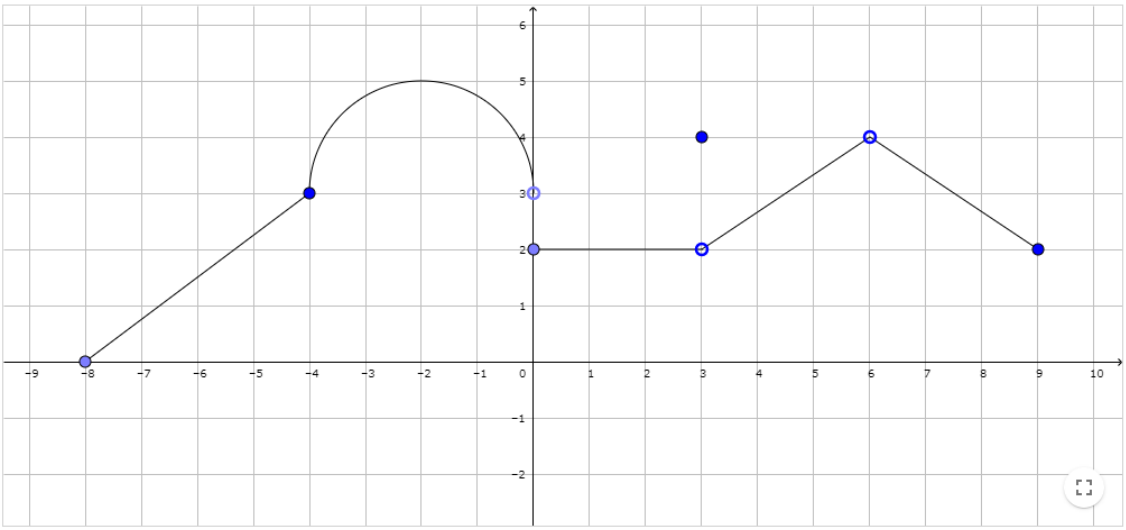


Figure 5: https://www.geogebra.org/m/JB4EXb85

7 Oefeningen

1. Bekijk de volgende grafiek van de functie f over het interval $[-8, 9]$



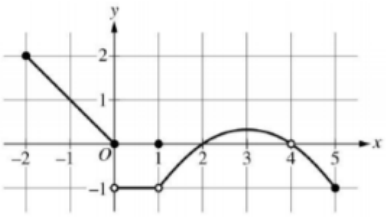
(a) Bepaal m.b.v. de definitie de continuïteit van de functie f voor $x = -4$, $x = 0$, $x = 3$

(b) Bepaal de x-waarden waarvoor de functie niet continu is, maar wel links resp. rechtscontinu is.

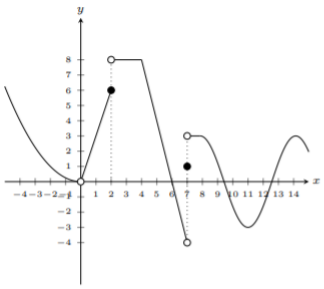
(c) Over welke intervallen is de functie continu?

i. $[-8, -4]$
ii. $[-8, 0]$
iii. $[-8, 0[$
iv. $[-2, 1]$
v. $]3, 6[$

2. Voor welke x-waarden in het interval $[-2, 5]$ is onderstaande functie waarvan de grafiek gegeven is niet continu. Geef telkens de reden hiervoor.



3. Welke bewering is foutief?



Using this figure, determine which of the following statements about f is false.

(A) $\lim_{x\to 0} f(x)$ exists.

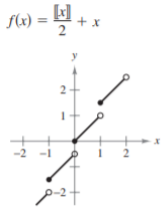
(B) f is discontinuous at 2.

(C) It is continuous at 4.

(D) $\lim_{x\to 7} f(x)$ exists.

Answer: $\square$

4. Ga met de definitie na dat $f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{2} + x$ niet continu is voor $x = 1$



5. Bepaal alle waarden waarvoor
   (a) $f(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ niet continu is.
   (b) $f(x) = \lfloor \sin(x) \rfloor$ niet continu is in het interval $[0, 2\pi]$
6. Onderzoek of de volgende functie continu is voor $x = 1$:

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x^2 + x - 2}$$

7. Toon aan dat er een oplossing is van de vergelijking $x^3 - x^2 + 3x - 1 = 1$
8. Toon aan dat de vergelijking $\sin(x) = 2\cos^2(x) + 0.5$ minstens één oplossing heeft.
9. Toon aan dat er een positieve oplossing is van de veeltermvergelijking $x^4 - 3x^3 + x^2 - 2 = 0$
10. Toon aan dat de functie $f(x) = 3x + 2cos(x) + 5$ een snijpunt met de x-as heeft
11. Bepaal de waarde(n) van a zodat volgende functie met meervoudig voorschrift continu is.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x & x \leq 2 \\ a^2x - 2x + 2 & x > 2 \end{cases}$$

12. Bepaal de waarde van m en k zodat volgende functie met meervoudig voorschrift continu is

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 8m, & x \leq -2 \\ mx + k, & -2 < x \leq 2 \\ -3x^2 + 8x - 2k, & 2 < x \end{cases}$$

13. Bepaal de waarde van a en b zodat volgende functie met meervoudig voorschrift continu is voor $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+4x-a}{x^2+2x-3} & x < 1 \\ x - b & x \geq 1 \end{cases}$$

14. Bepaal de waarde(n) van k zodat de volgende functies continu zijn voor de aangegeven x-waarden

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{x^2-x} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^2} & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k+1-x} & x \leq 3 \\ \sqrt{\frac{x^2-5x+6}{k(x-3)}} & x > 3 \end{cases}$

15. Bepaal de kleinste waarde van a zodat volgende functie met meervoudig voorschrift continu is:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq a \\ x^2 & x > a \end{cases}$$

16. Los op:

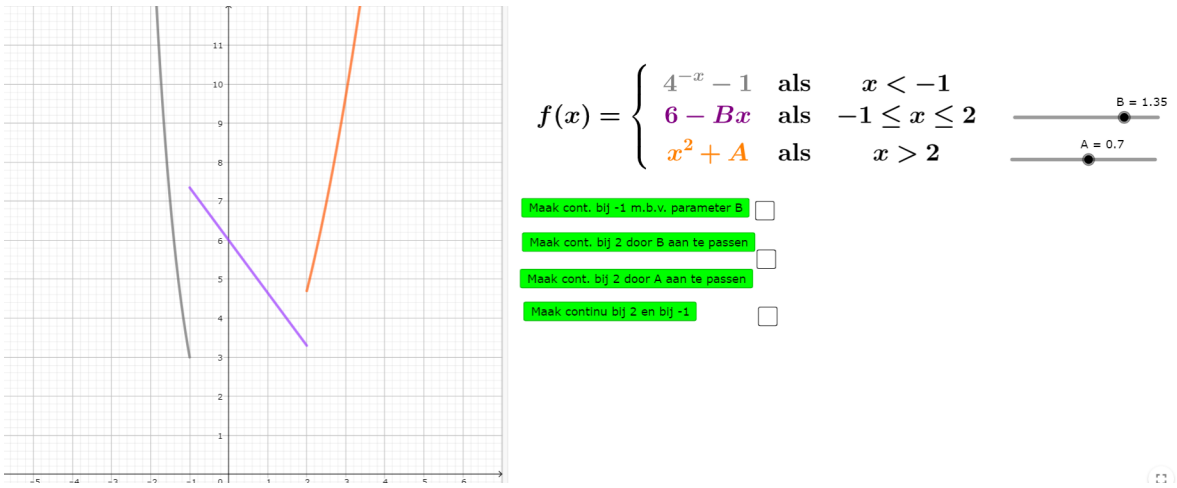


Figure 6: https://www.geogebra.org/m/Mcny7uY8

17. Een monnik vertrekt 's morgens uit zijn klooster beneden in het dal naar de berghut hoog in de bergen om daar de nacht al bezinnend door te brengen. De volgende ochtend vat hij de terugtocht aan naar het klooster. Toon aan dat er een tijdstip is waarop hij zich op exact dezelfde hoogte (in de bergen bevindt) dan 24 uur ervoor.

8 Taken

1. limieten van functies en continuïteit