

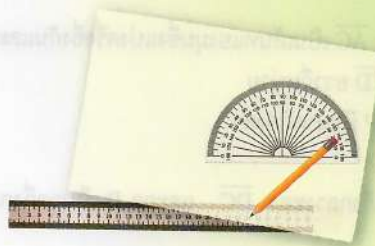
## 2.4 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม

ในหัวข้อนี้ จะกำหนดเงื่อนไขให้รูปสามเหลี่ยมสองรูป มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม ดังกิจกรรมต่อไปนี้

### กิจกรรม : สำรวจ มุม-ด้าน-มุม

#### อุปกรณ์

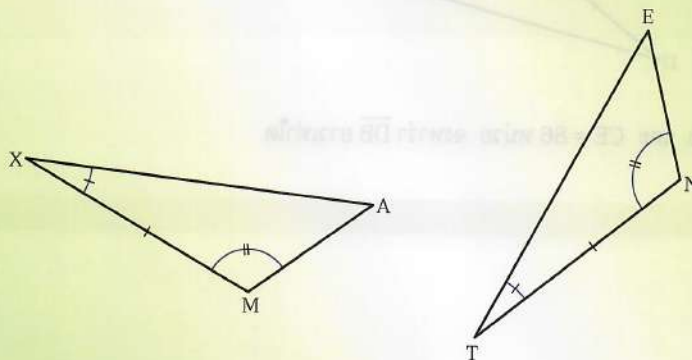
- ❖ โพรแทรกเตอร์
- ❖ ไม้บรรทัด
- ❖ ดินสอ
- ❖ กระดาษลอกลาย

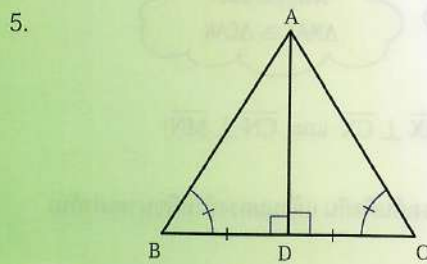
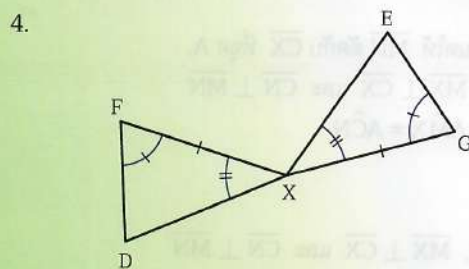
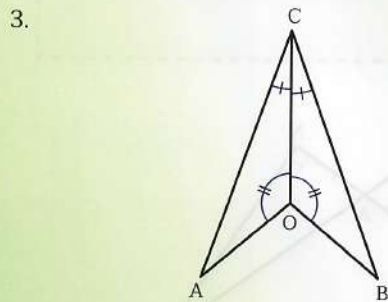
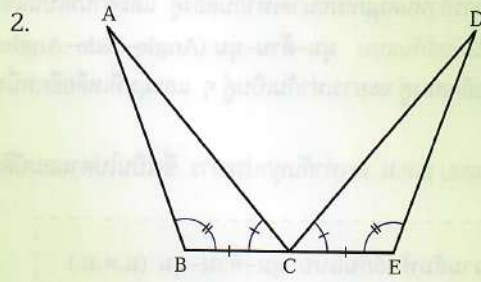


#### ขั้นตอนการทำกิจกรรม

กำหนดให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อต่อไปนี้ มีมุมที่มีขนาดเท่ากัน 2 คู่ และด้านที่ยาวเท่ากัน 1 คู่ จงสำรวจว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปดังกล่าวเท่ากันทุกประการหรือไม่

1.





### มุมเทคโนโลยี

นักเรียนสามารถดาวน์โหลดไฟล์ GSP เพื่อสำรวจเพิ่มเติมเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์แบบ มุม-ด้าน-มุม ได้ที่ <http://ipst.me/9144>

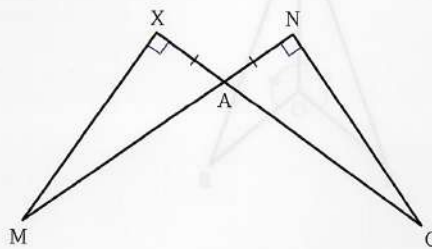


ผลจากการสำรวจข้างต้น นักเรียนจะเห็นว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่กำหนดให้ในแต่ละข้อเท่ากันทุกประการ และเมื่อพิจารณาจากรูปที่กำหนดให้ในแต่ละข้อ จะเห็นว่าเป็นการกำหนดมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านที่เป็นแขนร่วมของมุมยาวเท่ากัน ซึ่งกล่าวว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นมีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม (Angle-Side-Angle) หรือเขียนย่อ ๆ ว่า **ม.ด.ม. (ASA)** และผลที่ได้ตามมาคือ ด้านที่เหลืออีกสองคู่ จะยาวเท่ากันเป็นคู่ ๆ และมุมที่เหลืออีกหนึ่งคู่ จะมีขนาดเท่ากัน

โดยทั่วไป รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ม.ด.ม. จะเท่ากันทุกประการ ซึ่งเป็นไปตามสมบัติต่อไปนี้

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม (ม.ด.ม.) กล่าวคือ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านซึ่งเป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองยาวเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

**ตัวอย่างที่ 1**



**123 | มุมคณิต**

สัญลักษณ์  $AB \perp CD$  หมายความว่า  $AB$  ตั้งฉากกับ  $CD$

จากรูป กำหนดให้  $\overline{MN}$  ตัดกับ  $\overline{CX}$  ที่จุด  $A$ ,  $AX = AN$ ,  $\overline{MX} \perp \overline{CX}$  และ  $\overline{CN} \perp \overline{MN}$   
จงพิสูจน์ว่า  $\widehat{M}AX = \widehat{C}AN$

กำหนดให้  $\overline{MN}$  ตัดกับ  $\overline{CX}$  ที่จุด  $A$ ,  $AX = AN$ ,  $\overline{MX} \perp \overline{CX}$  และ  $\overline{CN} \perp \overline{MN}$   
ต้องการพิสูจน์ว่า  $\widehat{M}AX = \widehat{C}AN$

จะพิสูจน์ก่อนว่า  $\triangle MAX \cong \triangle CAN$

**พิสูจน์** พิจารณา  $\triangle MAX$  และ  $\triangle CAN$

$\widehat{X}M = \widehat{N}C = 90^\circ$  (กำหนดให้  $\overline{MX} \perp \overline{CX}$  และ  $\overline{CN} \perp \overline{MN}$ )

$AX = AN$  (กำหนดให้)

$\widehat{M}AX = \widehat{C}AN$  (ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน)

ดังนั้น  $\triangle MAX \cong \triangle CAN$  (ม.ด.ม.)

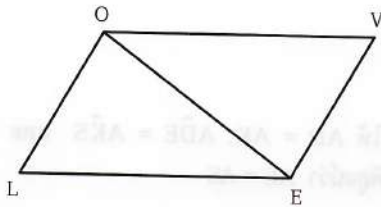
จะได้  $\widehat{M}AX = \widehat{C}AN$  (มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)



### ชวนคิด 2.7

จากตัวอย่างที่ 1 ถ้ากำหนดให้  $AX = 8$  หน่วย  $MA = 17$  หน่วย อยากทราบว่า  $\overline{CN}$  ยาวกี่หน่วย

#### ตัวอย่างที่ 2



จากรูป กำหนดให้  $\widehat{LOE} = \widehat{VEO}$  และ  $\widehat{OEL} = \widehat{E\hat{O}V}$  ถ้า  $LO = 5$  หน่วย ความยาวรอบรูปของ  $\square LOVE$  เท่ากับ 24 หน่วย จงหาความยาวของ  $\overline{OV}$

จะแสดงก่อนว่า  
 $\triangle LOE \cong \triangle VEO$

วิธีทำ พิจารณา  $\triangle LOE$  และ  $\triangle VEO$

$$\widehat{LOE} = \widehat{VEO} \quad (\text{กำหนดให้})$$

$$OE = EO \quad (\overline{OE} \text{ เป็นด้านร่วม})$$

$$\widehat{OEL} = \widehat{E\hat{O}V} \quad (\text{กำหนดให้})$$

$$\text{ดังนั้น } \triangle LOE \cong \triangle VEO \quad (\text{ม.ด.ม.})$$

$$\text{จะได้ } LO = VE \text{ และ } EL = OV \quad (\text{ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน})$$

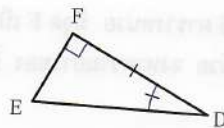
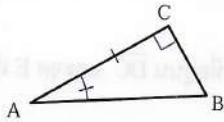
$$LO = 5 \quad (\text{กำหนดให้})$$

$$\text{ดังนั้น } OV = \frac{24 - 10}{2} = 7 \quad (\text{ความยาวรอบรูปของ } \square LOVE \text{ เท่ากับ 24 หน่วย})$$

ตอบ 7 หน่วย

#### แบบฝึกหัด 2.4

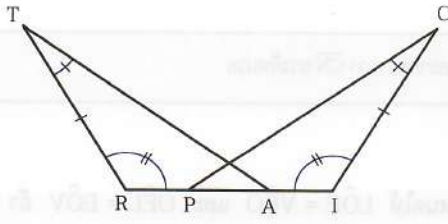
1.



จากรูป  $\triangle ABC$  และ  $\triangle DEF$  เท่ากันทุกประการหรือไม่ เพราะเหตุใด

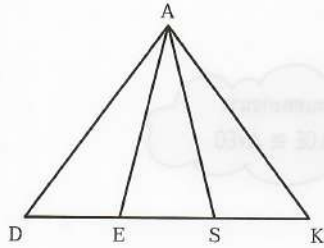


2.



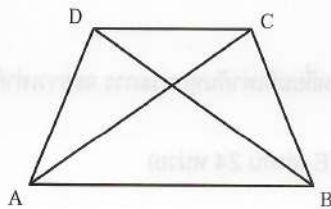
จากรูป จงพิสูจน์ว่า  $\Delta ART \cong \Delta PIC$

3.



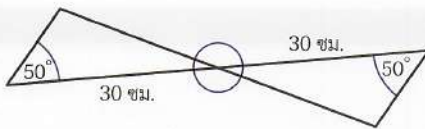
จากรูป กำหนดให้  $AD = AK$ ,  $\hat{ADE} = \hat{AKS}$  และ  $\hat{DAE} = \hat{KAS}$  จงพิสูจน์ว่า  $AE = AS$

4.



กำหนดให้  $\square ABCD$  มี  $DB = CA$ ,  $\hat{ADB} = \hat{BCA}$  และ  $\hat{ABD} = \hat{BAC}$  ถ้า  $\hat{DAB} = 68^\circ$  จงหาขนาดของ  $\hat{CBA}$

5.



เจ้าของร้านค้าออกแบบใบพัด ดังรูป ลูกค้าบอกว่าใช้ไม่ได้ เพราะใบพัดทั้งสองข้างดูแล้วเหมือนมีขนาดไม่เท่ากัน แต่เจ้าของร้านค้ายังยืนยันว่าแบบใบพัดสองข้างมีขนาดเท่ากัน จงอธิบายว่าความคิดของใครถูกต้อง

6. กำหนดให้  $\square ABCD$  เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ที่มีพื้นที่ 16 ตารางหน่วย มีจุด F เป็นจุดที่อยู่บน  $\overline{DC}$  และจุด E เป็นจุดที่อยู่บน  $\overline{BC}$  ที่ทำให้  $\hat{DAF} = \hat{BAE}$  ถ้า  $AF = 5$  หน่วย จงหาความยาวของ  $\overline{BE}$