Toepassingen bepaalde integralen

www.karelappeltans.be

April 12, 2021

1 Oppervlakteberekening

Voorbeeld 1:

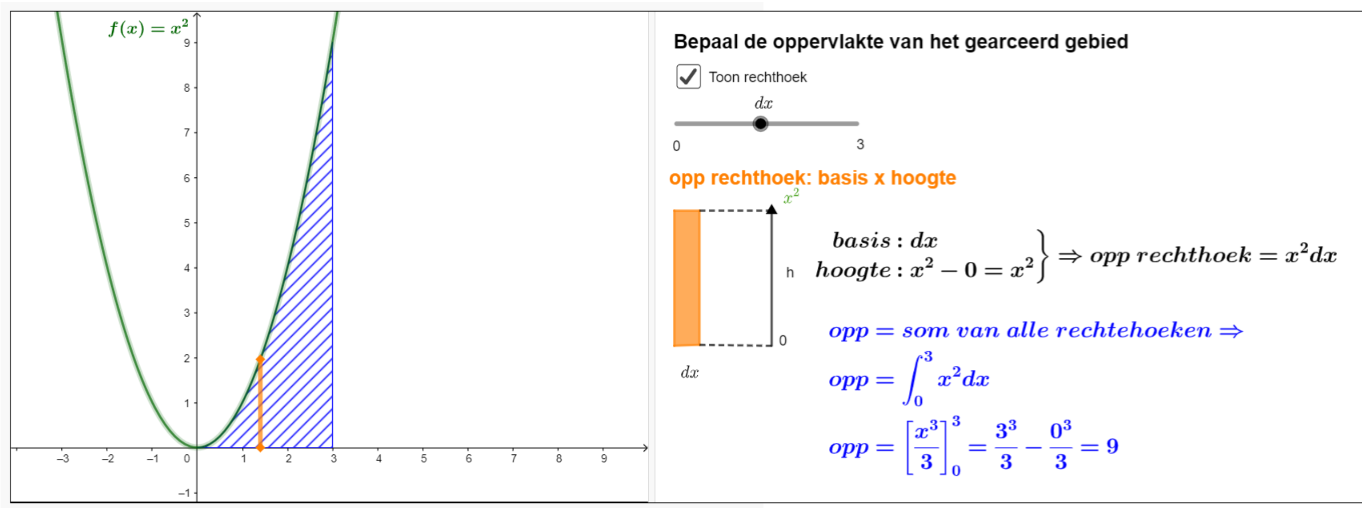


Figure 1: https://www.geogebra.org/m/QXvv6bTK

Voorbeeld 2:

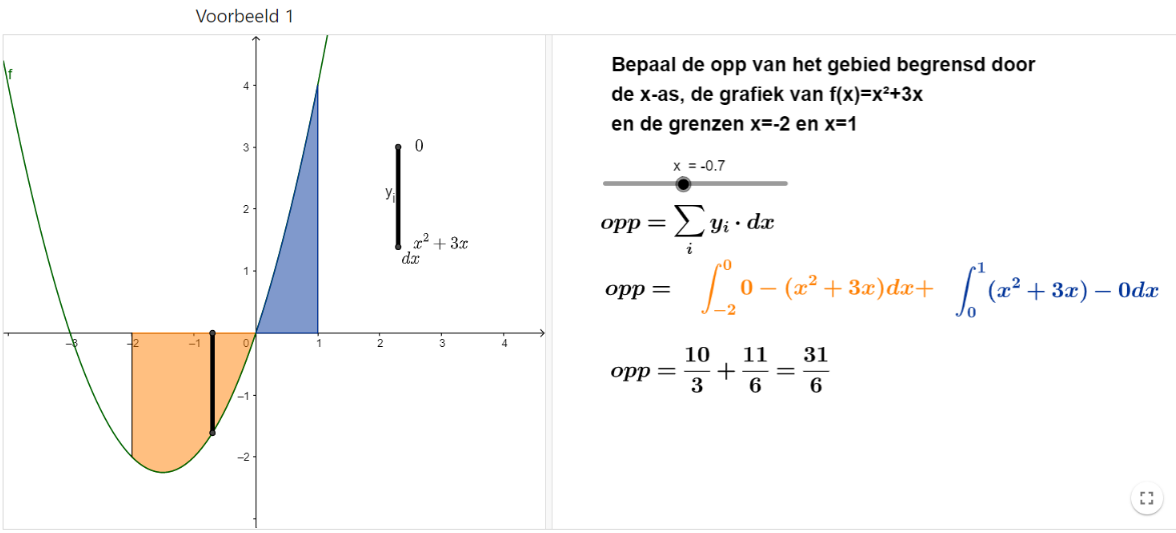


Figure 2: https://www.geogebra.org/m/QXvv6bTK

Voorbeeld 3:

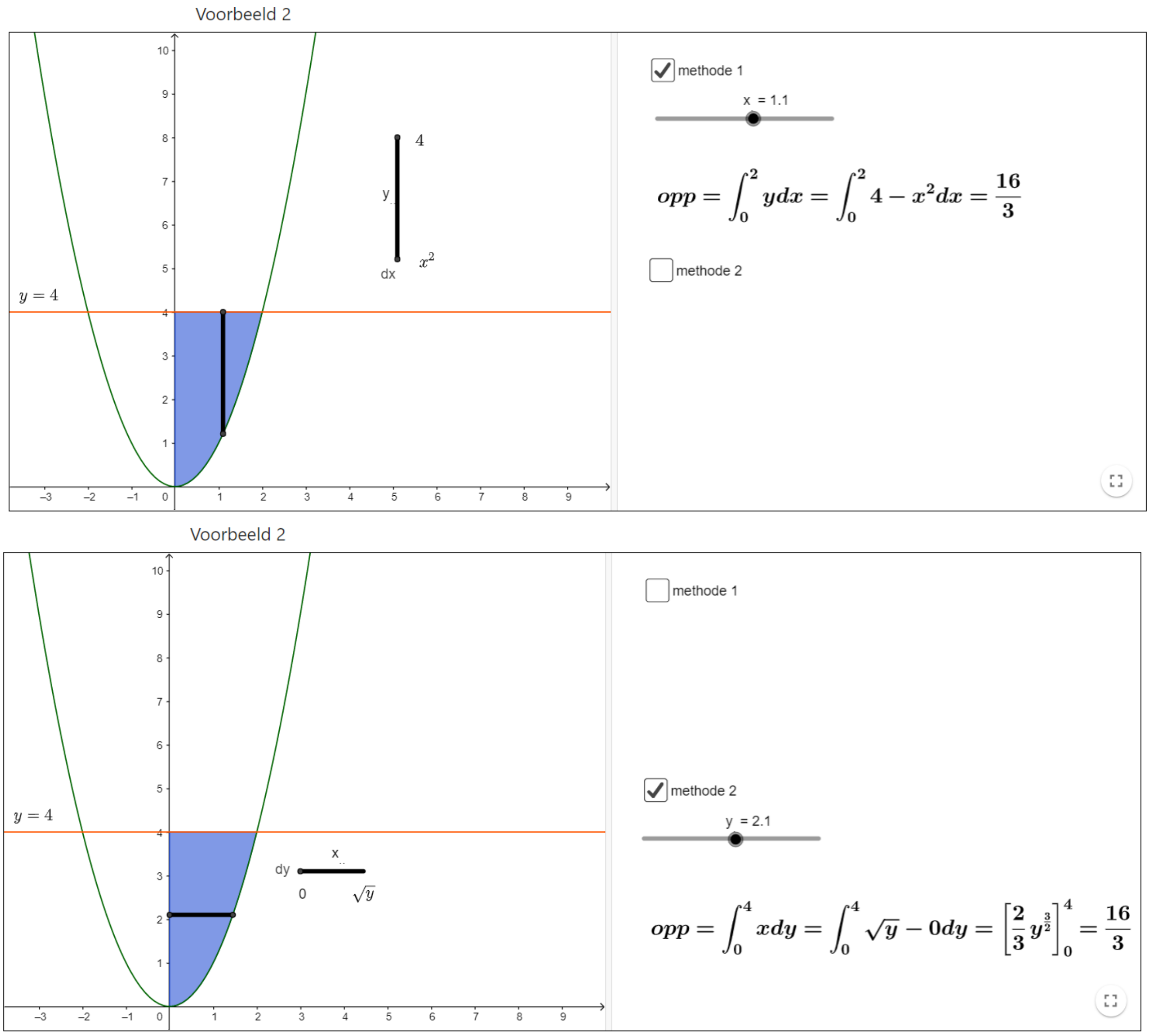


Figure 3: https://www.geogebra.org/m/QXvv6bTK

Voorbeeld 4:

Voorbeeld 3

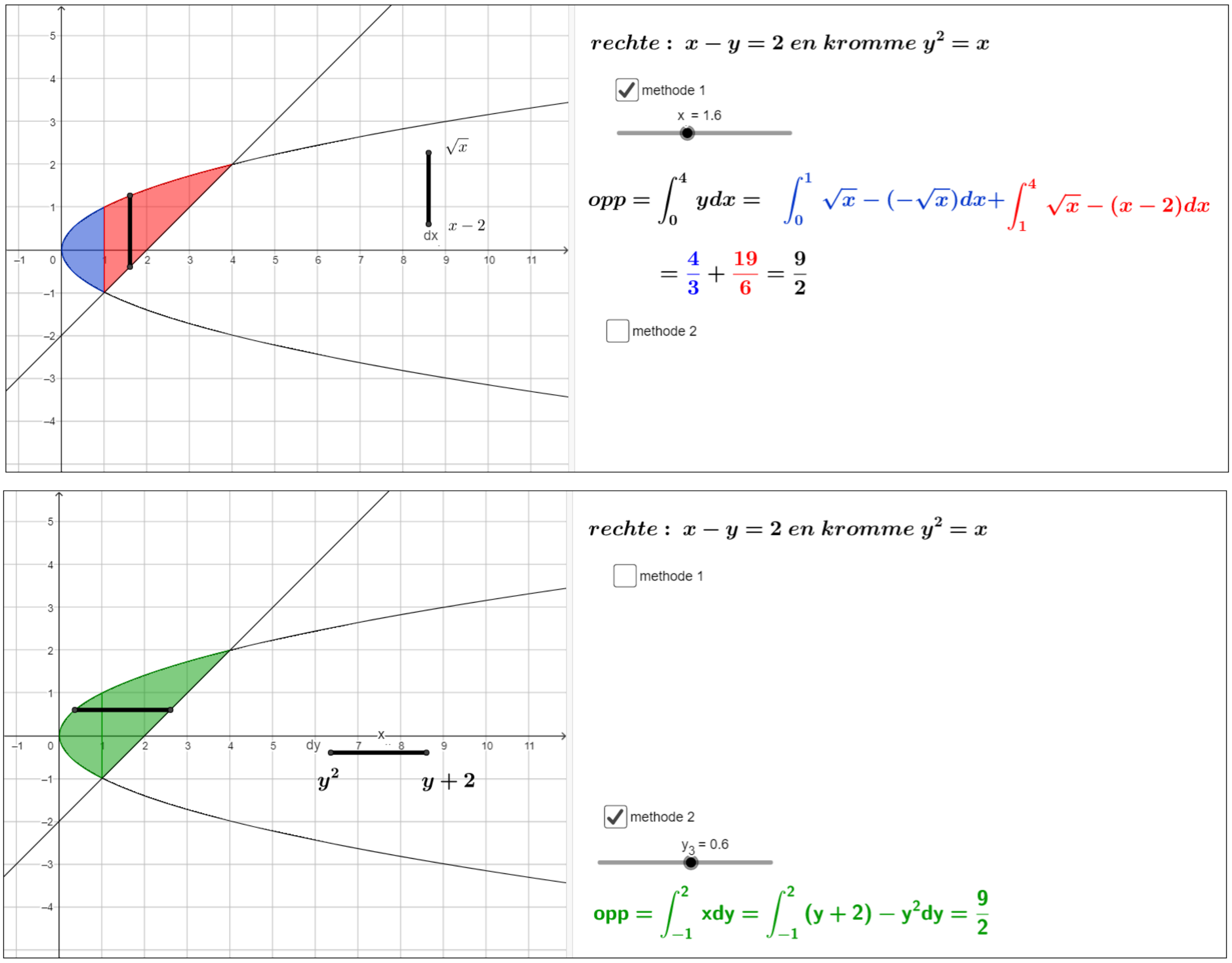


Figure 4: https://www.geogebra.org/m/QXvv6bTK

2 Lengteberekening

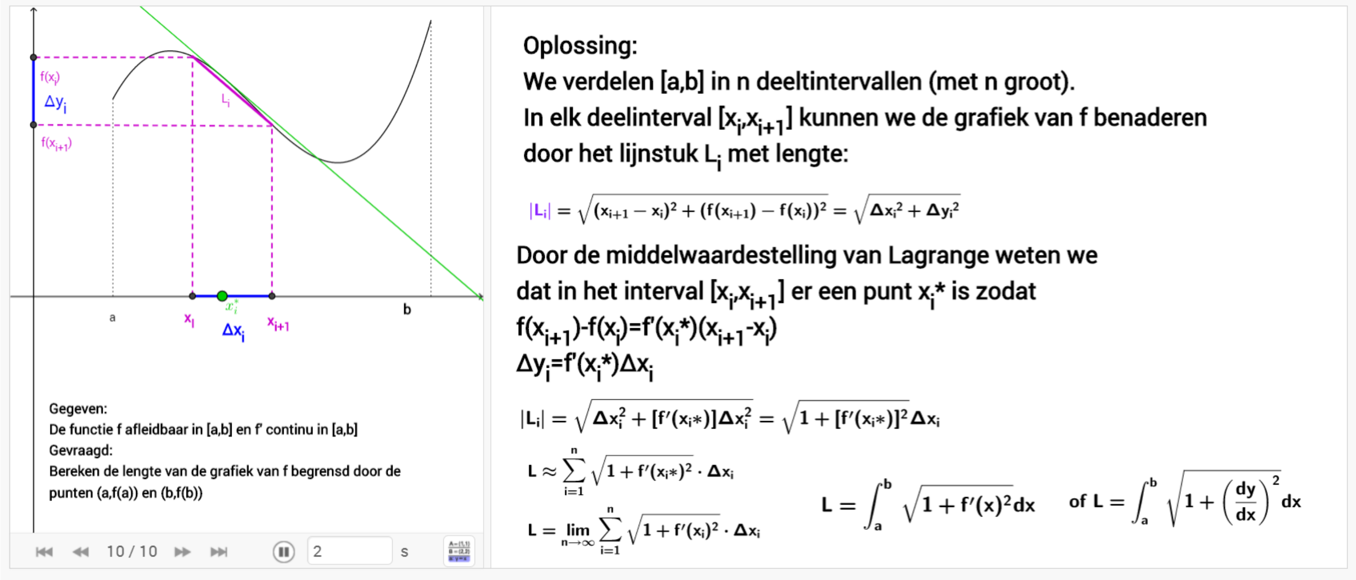


Figure 5: https://www.geogebra.org/m/C4h9qQaq

3 Inhoudsberekening bij omwentelingslichamen

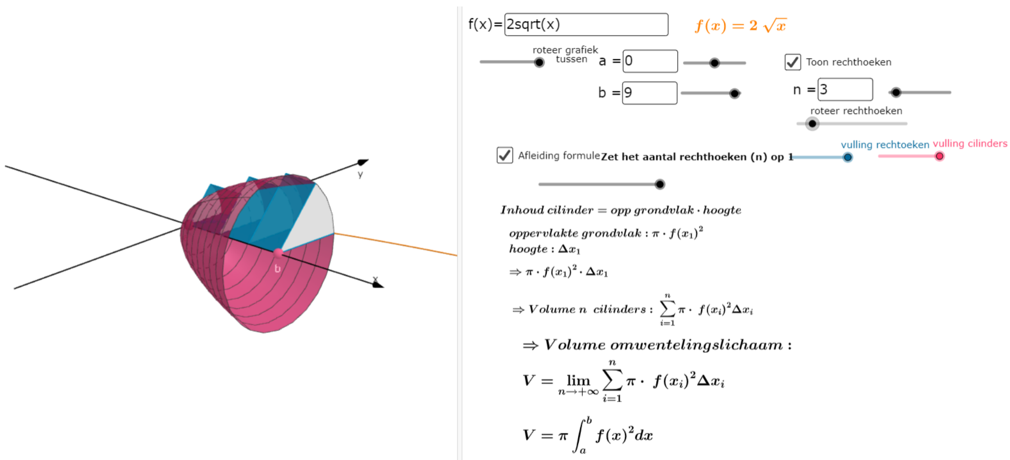
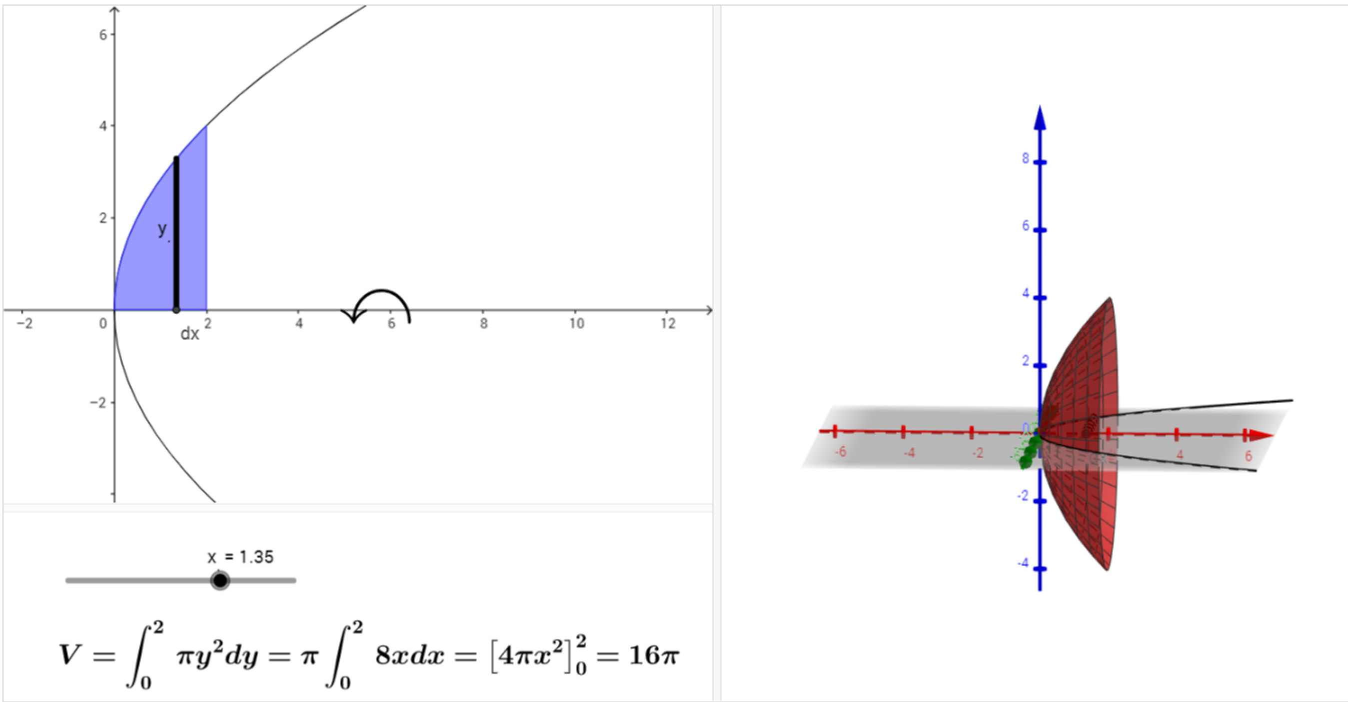


Figure 6: https://www.geogebra.org/m/b5DqDWuM

1. Bepaal het volume dat bekomen wordt door het vlakdeel in het eerste kwadrant begrensd door $y^2 = 8x$ en $x = 2$ te wentelen rond de x-as



2. Bepaal het volume dat bekomen wordt door het vlakdeel begrensd door $y^2 = 8x$ en $x = 2$ te wentelen rond de rechte $x = 2$

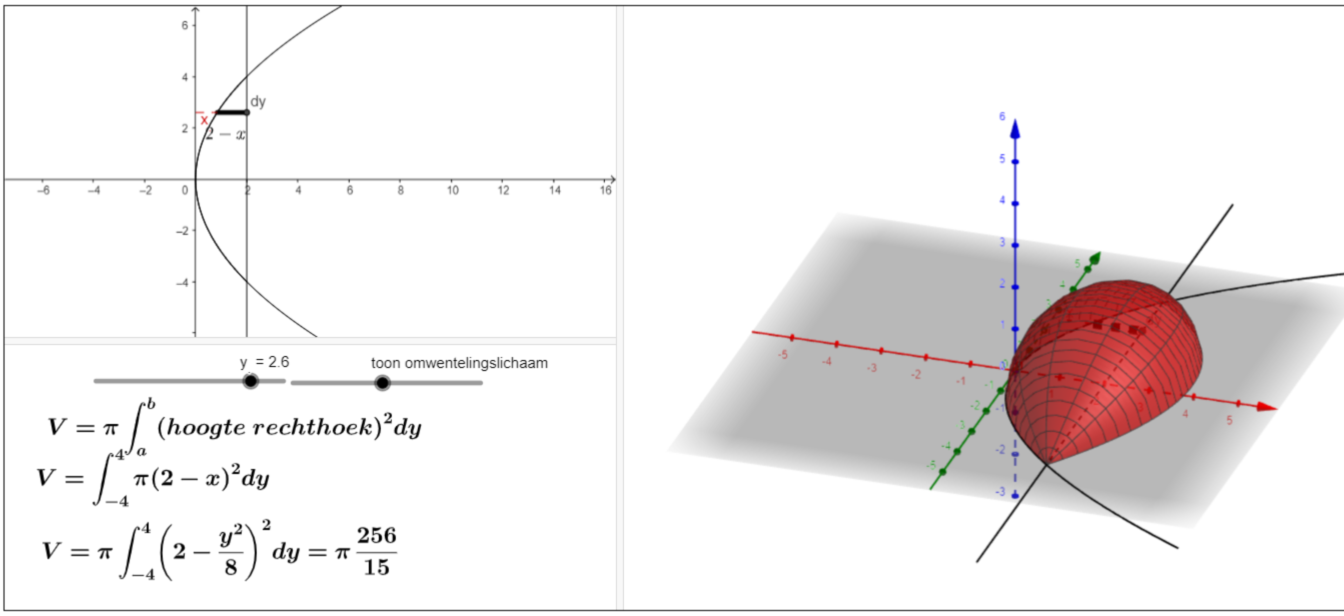


Figure 7: https://www.geogebra.org/m/b5DqDWuM

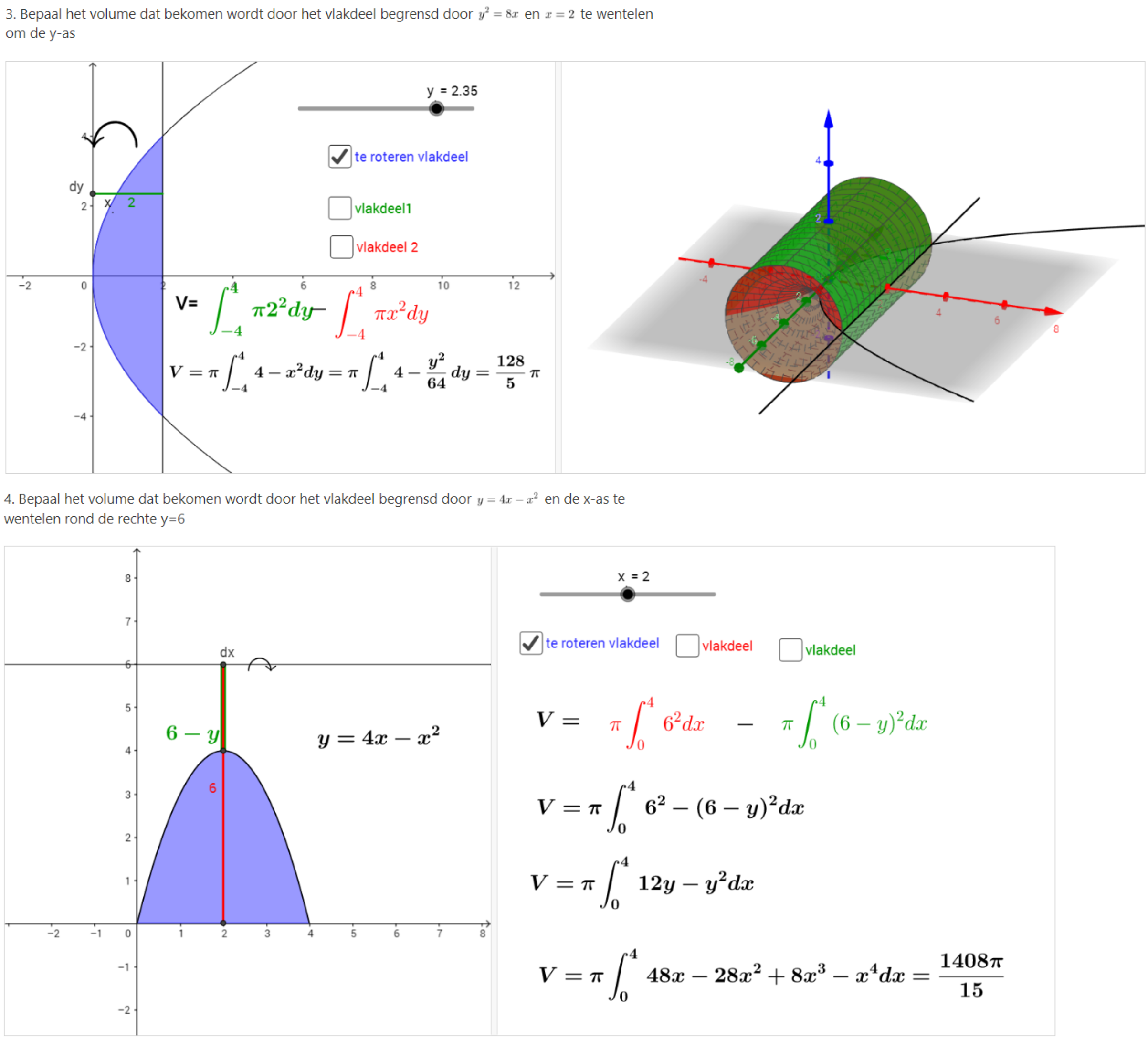


Figure 8: https://www.geogebra.org/m/b5DqDWuM

4 Differentiaalvergelijkingen

4.1 Scheiding der veranderlijken

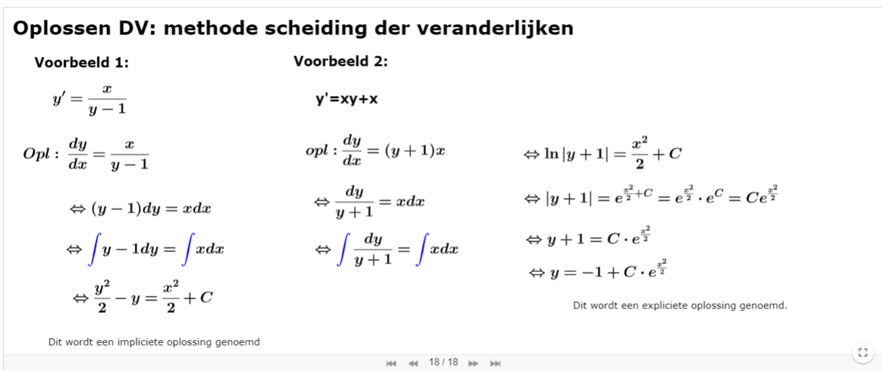


Figure 9: https://www.geogebra.org/m/rymragnh

4.2 Groeimodellen

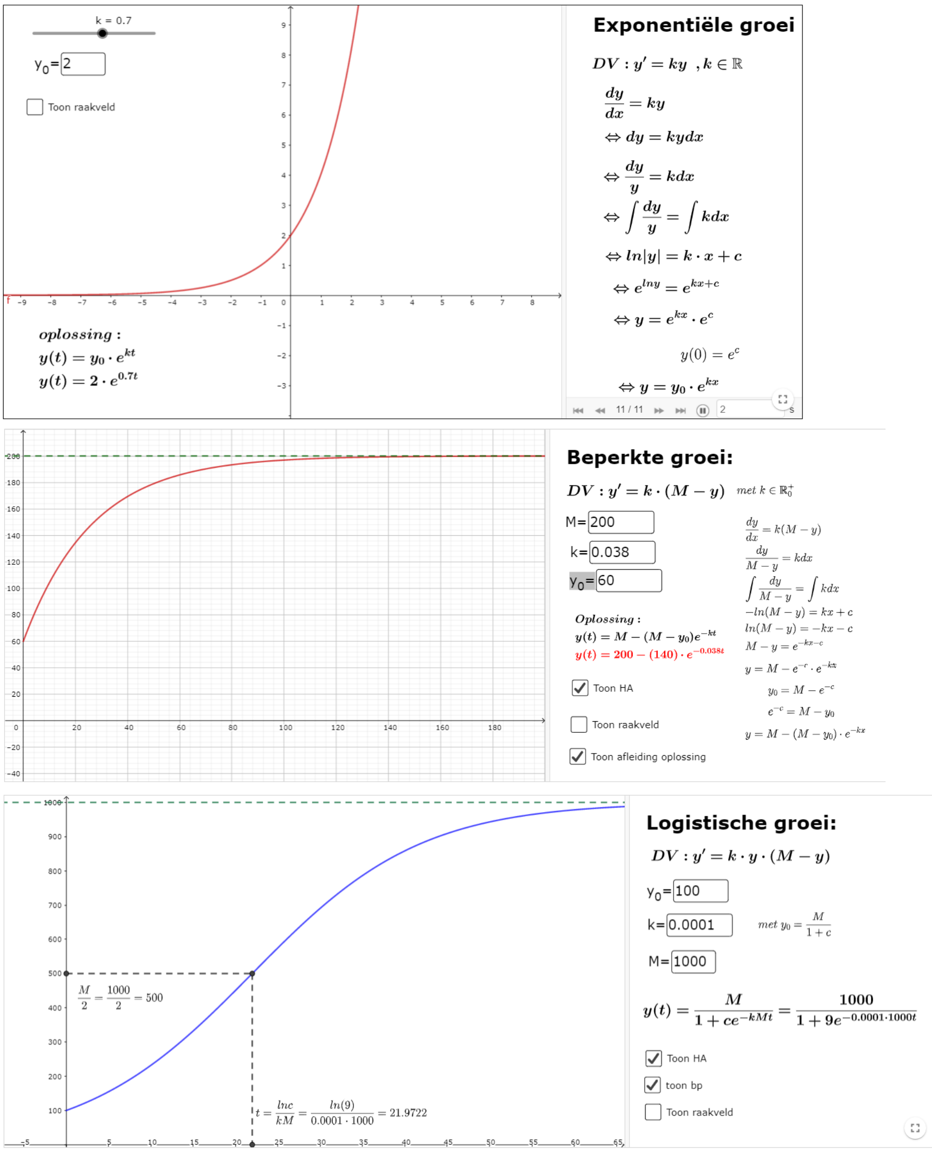


Figure 10: https://www.geogebra.org/m/f6tcwvzw

5 Toepassingen uit de economie

5.1 consumenten en producentensurplus

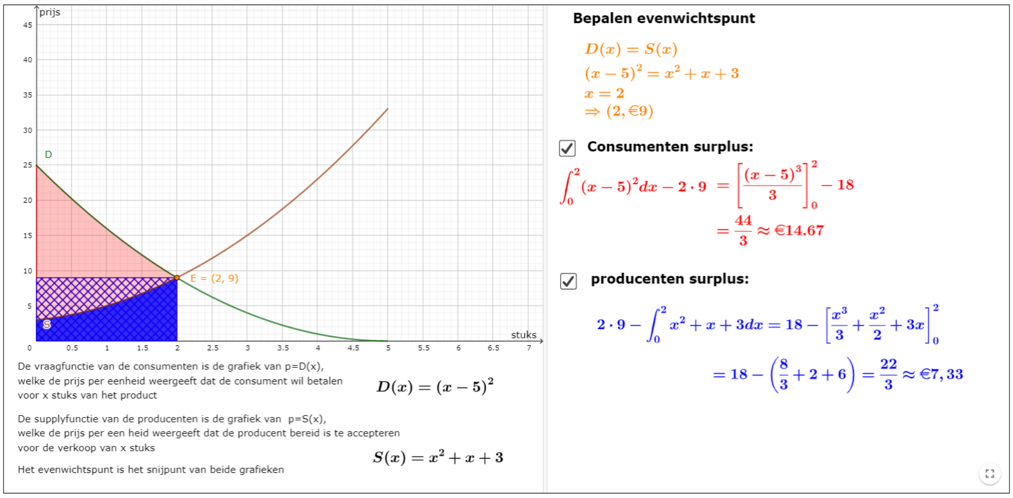


Figure 11: https://www.geogebra.org/m/d8kbjdv5

6 Toepassingen uit de wetenschappen

6.1 positie-snelheid-versnelling

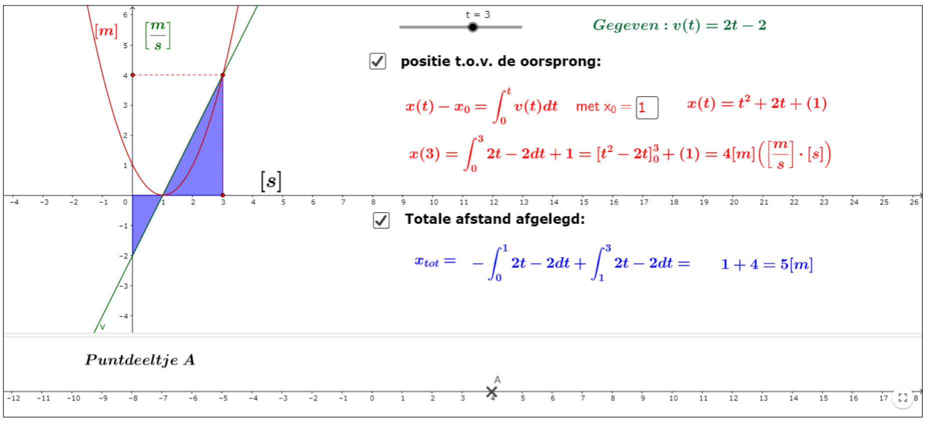


Figure 12: https://www.geogebra.org/m/vxxaKKUh

7 Oneigenlijke integralen

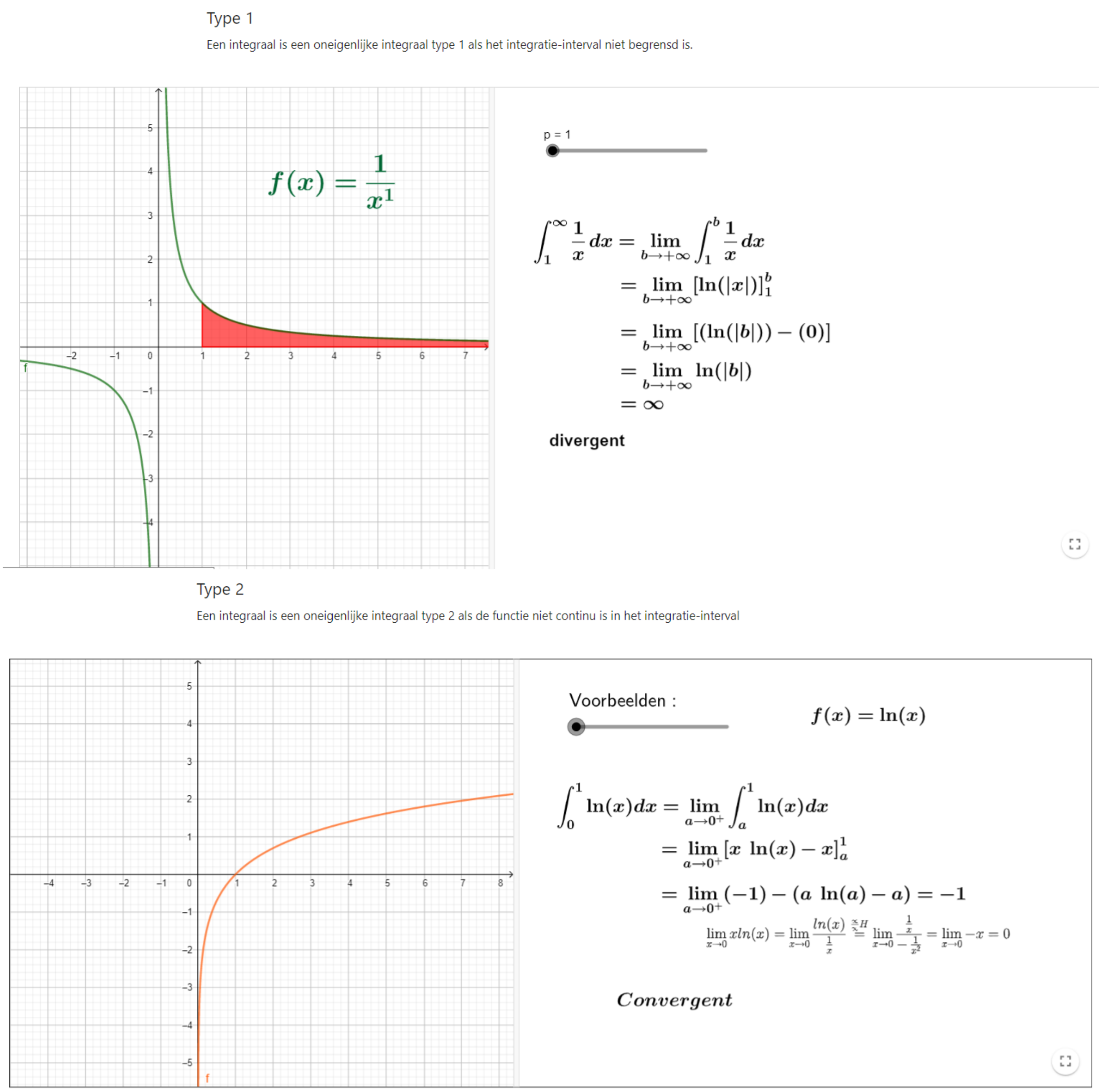


Figure 13: https://www.geogebra.org/m/RsE37tum

8 Oefeningen

8.1 Oppervlakteberekening

1. Bereken de oppervlakte tussen de grafiek van de gegeven functie en de x-as

   (a) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ met $x \in [0, 2]$

   (b) $g(x) = \sin(2x) + 2\cos(x)$ met $x \in [0, 2\pi]$ (antw. A=8)

   (c) $f(x) = x \cdot \sqrt{4 - x^2}$

2. Bereken de oppervlakte tussen de grafieken van de gegeven functies (en eventueel de opgegeven grenzen):

   (a) $y^2 = x$ en $x - y = 2$

(b) $y^2 = 4x$ en $y = 2x - 4$

(c) $y = -x$ en $y = \sqrt{16 - 6x}$ en $y = 0$

(d) $y = \cos(x)$ en $y = \cos^2(x)$ en $x = 0$ en $x = \pi$ (antw A=2)

(e) $y = x - 1$ en $y^2 = 2x + 6$ (antw. A=18)

(f) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ en $g(x) = (3 - x)e^x$

(g) 10 extra oefeningen op de website:

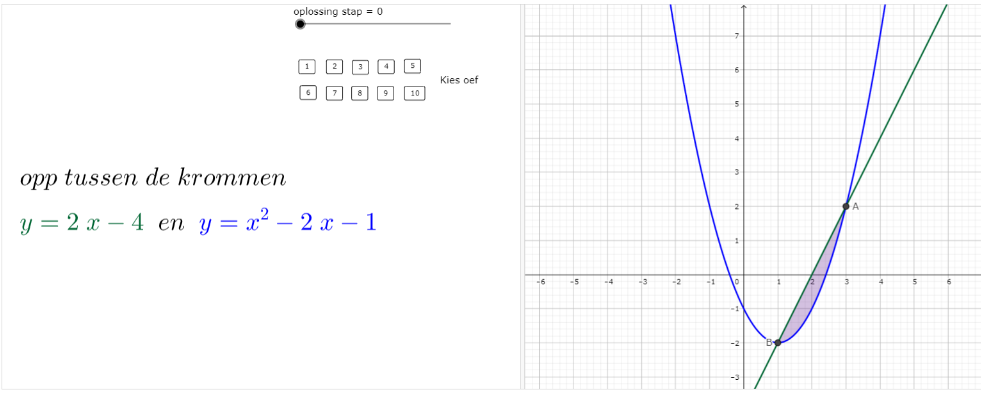


Figure 14: https://www.geogebra.org/m/QXvv6bTK

3. Bereken de oppervlakte van het gebied, begrensd door de kromme $y = x^3 - 3x^2 + 5$, de X-as en de verticale lijnen door het maximum en het minimum van de gegeven functie. Maak een duidelijke tekening! (antw. A=6)

4. Bereken de opp van het gebied begrensd door de kromme $y = x^(1/3)$ en de component van $y = tan(\pi x/4)$ die de oorsprong bevat. (antw. A=$\frac{1}{2\pi}(3\pi - 8ln(2))$)

5. Bepaal de vergelijking van de rechte L door de oorsprong die het gebied tussen de grafiek van de gegeven functie en de X-as in twee gebieden verdeelt met dezelfde oppervlakte.

   (a) $y = -x^2 + 6x$ (antw. $y = (-3\sqrt[3]{4} + 6)x$)

   (b) $y = 2x - x^2$

6. Bereken de oppervlakte tussen de grafieken van $y = k\sin(kx)$ en $y = 2k - k\sin(kx)$ over het interval $[0, \frac{\pi}{k}]$

8.2 Lengteberekening

1. Bereken de lengte van de gegeven krommen tussen de aangegeven waarden:

   (a) $y = x^{\frac{3}{2}}$ tussen $x = 0$ en $x = 5$

   (b) $24xy = x^4 + 48$ tussen $x = 2$ en $x = 4$

   (c) $x = 3y^{\frac{3}{2}}$ tussen $y = 0$ en $y = 4$

   (d) $y = ln(1 - x^2)$ en $x = \frac{1}{4}$ en $x = \frac{3}{4}$

   (e) $y = \frac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ tussen $x = 0$ en $x = a$

2. Bepaal m.b.v. een GZRM de lengte van de kromme $y = \sqrt{4x - x^2}$ van $x = 0$ tot en met $x = 4$. Hoe had je deze lengte ook nog kunnen bepalen?

8.3 Inhoudsberekening

1. Bereken de inhoud van een bol met straal r
2. Bereken de inhoud van kegel met straal r en hoogte h
3. Bereken de inhoud van een torus
4. Bepaal het volume bekomen door het vlakdeel begrensd door $y = 4x^2$, $x = 0$, $y = 16$ te wentelen om de y-as (Antw. 32π)
5. Het punt P is het punt waar de grafiek van $y = x^3 - 3x$ een minimum vertoont. Door rotatie van het vlakdeel begrensd door de grafiek en de raaklijn in dit minimum rond deze raaklijn ontstaat een ajuinvormig lichaam. Bereken de inhoud ervan. (opl. Inh=$\frac{729\pi}{35}$
6. Bepaal het volume bekomen door het vlakdeel begrensd door $y = x$ en $y = \sqrt{x}$ te wentelen rond de rechte $y = -1$ (opl: $\frac{\pi}{2}$)
7. Bepaal het volume bekomen door het vlakdeel begrensd door $y = x^2$, $y = 4x - x^2$ te wentelen rond $y = 6$ (Antw. $\frac{64\pi}{3}$)
8. Bereken de inhoud bekomen door het vlakdeel, begrensd door de grafiek van $f(x) = b\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$, $x = 0$ en $x = a$ te wentelen om de x-as. (opl. $V = \frac{\pi ab^2}{2}$)
9. Zij R het gebied begrens door de krommen $y = 0$ en $y = x^2 + x$ en tussen $x = 0$ en $x = 1$. Bepaal de inhoud van het omwentelingslichaam bekomen door R te wentelen rond $y = -1$ (opl. $\frac{27\pi}{10}$)

8.4 Differentiaalvergelijkingen

1. Bepaal de algemene oplossing van de volgende differentiaalvergelijkingen
   (a) $y - xy' = 0$
   (b) $y' = \frac{y^2}{x^2+1}$
   (c) $\sin x dy - \cos x dx = 0$
   (d) $y' = y^2$
2. Leid de algemene oplossing af voor een logistisch groeiproces

8.5 Toepassingen uit de economie

1. Bereken het consumer surplus en het producer surplus bij het evenwichtspunt
   (a) $D(x) = -\frac{5}{6}x + 9$ en $S(x) = \frac{1}{2}x + 1$
   (b) $D(x) = (x-4)^2$ en $S(x) = x^2 + 2x + 6$
   (c) $D(x) = (x-6)^2$ en $S(x) = x^2$
   (d) $D(x) = (x-3)^2$ en $S(x) = x^2 + 2x + 1$
2. De marginale kost voor het produceren van goedkope digitale fototoestellen wordt (bij benadering) gegeven door $K'(q) = 0.09q^2 - 2q + 50$ waarbij q het aantal geproduceerde toestellen per uur voorstelt
   (a) Bereken de kostenfunctie K(q) als het bedrijf 1000 euro nodig heeft om de productie te starten
   (b) Bereken de extra kosten bij een productieverhoging van 20 naar 30 toestellen per uur door gebruik te maken van integralen.
3. Bij de firma Taktik worden projectieklokken geproduceerd. De marginale kost wordt benaderd door $K'(q) = 3q^2 - 30q + 73$ en de marginale winst door $W'(q) = -3q^2 + 30q - 48$ waarbij q het aantal klokken voorstelt dat per uur geproduceerd wordt. De vaste kosten bedragen 15 euro.
   (a) Bereken de kostenfunctie K(q)

(b) Hoeveel kost 1 projectieklok in de winkel?

(c) Bereken de winstfunctie W(q)

(d) Hoeveel klokken per uur moet de firma produceren om een maximale winst te hebben? Hoeveel bedraagt die maximale winst?

8.6 toepassingen uit de wetenschappen

1. Een puntdeeltje bevindt zich op $t = 0$ in de oorsprong en beweegt zich met een snelheid van $v(t) = 2t - 2\left[\frac{m}{s}\right]$

   (a) Bepaal de positie na 5 [s].

   (b) Bepaal de totaal afgelegde weg na 5 [s].

2. Een voorwerp beweegt zich langs een rechte lijn met snelheidsfunctie $v(t) = 2 - 3t + t^2\left[\frac{m}{s}\right]$. Op het tijdstip $t = 0$ bevindt zich het voorwerp 2 m rechts van de oorsprong. Bepaal de positie na 4 [s].

3. Een bal rolt over een weg met een beginsnelheid van $8\left[\frac{m}{s}\right]$. Omwille van de wrijving neemt de snelheid af met $a(t) = -2\left[\frac{m}{s^2}\right]$. Hoe ver zal de bol rollen? (Antw. 16 [m])

4. Een deeltje beweegt langs de x-as met versnellingsfunctie $a(t) = 2t - 2\left[\frac{m}{s^2}\right]$. Op het begintijdstip bevindt het deeltje zich in $x = 5[m]$. Een seconde later beweegt het deeltje met een snelheid van 4 meter per seconde naar links.

   (a) Bepaal de snelheidsfunctie v(t) en de afstandsfunctie x(t).

   (b) Waar bevindt het deeltje zich na 3 [s]

5. De snelheid van een auto in functie van de tijd is gegeven door de volgende vergelijking: $v(t) = t^2\left[\frac{m}{s}\right]$

   (a) Bepaal de verplaatsing tussen 0[s] en 3[s]

   (b) Bepaal de gemiddelde snelheid in dit interval om dezelfde verplaatsing te bekomen en het tijdstip waarop deze snelheid wordt behaald.

8.7 Oneigenlijke integralen

1. Bereken de volgende oneigenlijke integralen:

   (a) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1} dx$

   (b) $\int_0^{+\infty} \frac{ln(x)}{x^2} dx$

   (c) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

   (d) $\int_0^{+\infty} e^x dx$

   (e) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$

   (f) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$

2. Bereken de volgende oneigenlijke integralen

   (a) $\int_0^{+\pi} \frac{1}{cos^2(x)} dx$

   (b) $\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

   (c) $\int_{-}^{1} \frac{1}{x^2} dx$

   (d) $\int_0^{3} \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx$

   (e) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)^3}$