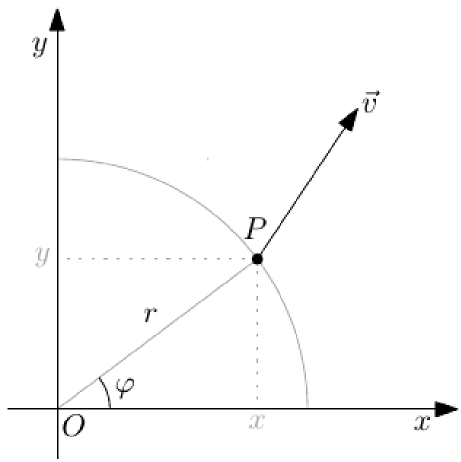
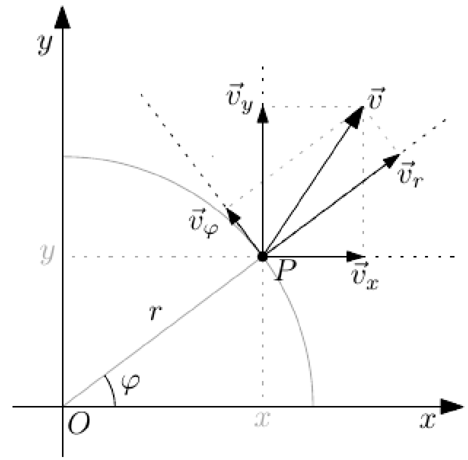
Složky rychlosti a zrychlení v polárních souřadnicích

https://physics.fjfi.cvut.cz/~schmidt/mech/polarni_rychlost.pdf

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi. \quad (1)$$





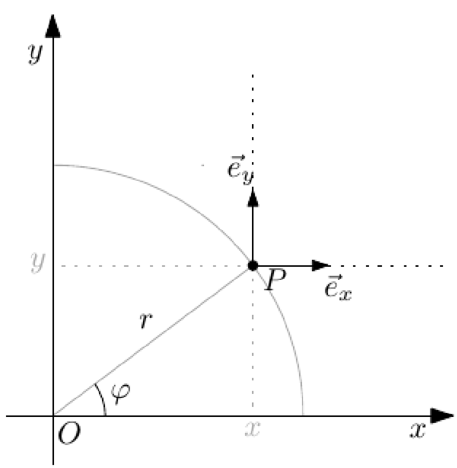
$P[x, y]$ … kartéz. souř.

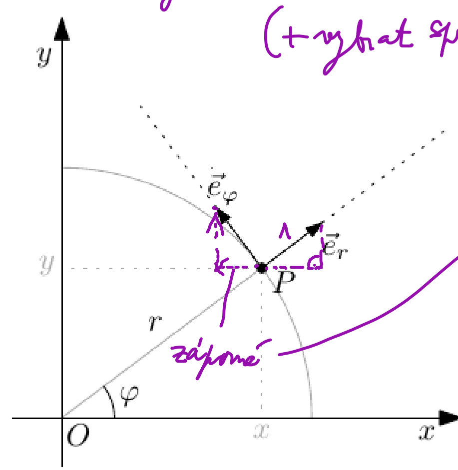
$P[r, \varphi]$ … polární souř.

$$\vec{e}_x = (1, 0), \qquad \vec{e}_y = (0, 1). \quad (2)$$

$$\underbrace{\vec{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi), \qquad \vec{e}_\varphi}_{} = (-\sin\varphi, \cos\varphi). \quad (3)$$

Kolmé vektory → zkolmením $\vec{e}_r$ dostanu $\vec{e}_\varphi$ (+ vybrat správně orientaci)





$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi. \qquad (1)$$

$\downarrow$

$$\left.\begin{aligned}\vec{v} &= v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y\\ \vec{v} &= v_r\vec{e}_r + v_\varphi\vec{e}_\varphi\end{aligned}\right\} \rightarrow v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y = v_r\vec{e}_r + v_\varphi\vec{e}_\varphi$$

.... dosadit sem 2 a 3

$$v_x\cdot(1;0) + v_y\cdot(0;1) = v_r\cdot(\cos\varphi;\sin\varphi) + v_\varphi\cdot(-\sin\varphi;\cos\varphi)$$

$$(v_x;v_y) = (v_r\cos\varphi - v_\varphi\sin\varphi;\ v_r\sin\varphi + v_\varphi\cos\varphi)$$

$\downarrow$

$$v_x = v_r\cos\varphi - v_\varphi\sin\varphi, \qquad (4)\,|\cdot\sin\varphi$$

$$v_y = v_r\sin\varphi + v_\varphi\cos\varphi. \qquad (5)\,|\cdot\cos\varphi$$

- Vyjádříme v_r a v_φ pomocí v_x a v_y:

$$\left.\begin{aligned}(4)\cdot\sin\varphi:&\quad v_x\sin\varphi = v_r\sin\varphi\cos\varphi - v_\varphi\sin^2\varphi\\ (5)\cdot\cos\varphi:&\quad v_y\cos\varphi = v_r\sin\varphi\cos\varphi + v_\varphi\cos^2\varphi\end{aligned}\right\}\ \text{odečtu}$$

$$v_y\cos\varphi - v_x\sin\varphi = v_\varphi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$$

$$\boxed{v_\varphi = -v_x\sin\varphi + v_y\cos\varphi} \qquad (6)$$

analogicky:

$$\left.\begin{aligned}(4)\cdot\cos\varphi:&\quad v_x\cos\varphi = v_r\cos^2\varphi - v_\varphi\sin\varphi\cdot\cos\varphi\\ (5)\cdot\sin\varphi:&\quad v_y\sin\varphi = v_r\sin^2\varphi + v_\varphi\sin\varphi\cos\varphi\end{aligned}\right\}\ \text{sečtu}$$

$$v_x \cos\varphi + v_y \sin\varphi = v_r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$$

$$\boxed{v_r = v_x \cos\varphi + v_y \sin\varphi} \quad (7)$$

My bychom ale chtěli vyjádření obsahující *pouze* polární souřadnice. Musíme tedy ještě najít vyjádření kartézských složek rychlosti (v_x, v_y) pomocí polárních souřadnic. Ty získáme snadno zderivováním transformačních vztahů mezi kartézskými a polárními souřadnicemi podle času:

$$x = r\cos\varphi, \qquad v_x = \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \qquad (8)$$

$$y = r\sin\varphi, \qquad v_y = \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi. \qquad (9)$$

do (6), (7)

$$v_\varphi = -v_x \sin\varphi + v_y \cos\varphi$$

$$= \cancel{-\dot{r}\cos\varphi\sin\varphi} + r\dot{\varphi}\sin^2\varphi + \cancel{\dot{r}\sin\varphi\cos\varphi} + r\dot{\varphi}\cos^2\varphi = r\dot{\varphi}$$

$$v_r = \dot{r}\cos^2\varphi - \cancel{r\dot{\varphi}\sin\varphi\cdot\cos\varphi} + \dot{r}\sin^2\varphi + \cancel{r\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi} = \dot{r}$$

$$\boxed{v_\varphi = r\dot{\varphi}} \qquad \boxed{v_r = \dot{r}}$$

Předchozí postup pro vektor rychlosti $\vec{v}$ můžeme úplně stejně zopakovat pro vektor zrychlení $\vec{a}$ (ve skutečnosti pro jakýkoliv vektor), stačí tedy v (6) a (7) zaměnit v za a:

$$a_\varphi = -a_x \sin\varphi + a_y \cos\varphi, \qquad a_r = a_x \cos\varphi + a_y \sin\varphi. \tag{12}$$

Vyjádření kartézských složek zrychlení (a_x, a_y) pomocí polárních souřadnic získáme dalším derivováním (8) a (9):

$$v_x = \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi,$$
$$v_y = \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

$$\dot{v}_x = \ddot{x} = a_x = \ddot{r}\cos\varphi - \dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - \left[(r\dot{\varphi})' \cdot \sin\varphi + (r\dot{\varphi})\cdot\dot{\varphi}\cos\varphi\right]$$

$$= \ddot{r}\cos\varphi - \dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - \left[(\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\sin\varphi + r\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right]$$

$$= \ddot{r}\cos\varphi - \dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi$$

$$\left.\begin{aligned} &= \underline{\ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi} \\ &\text{analogicky:} \\ &\dot{v}_y = \ddot{y} = a_y = \underline{\ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi} \end{aligned}\right\} \text{do (12);}$$

$$a_\varphi = -\ddot{r}\cancel{\sin\varphi}\cos\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin^2\varphi + r\ddot{\varphi}\sin^2\varphi + r\dot{\varphi}^2\cancel{\sin\varphi}\cos\varphi +$$

$$+ \ddot{r}\cancel{\sin\varphi}\cos\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos^2\varphi + r\ddot{\varphi}\cos^2\varphi - r\dot{\varphi}^2\cancel{\sin\varphi}\cos\varphi =$$

$$= 2\dot{r}\dot{\varphi}(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + r\ddot{\varphi}(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \underline{r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}}$$

analogicky $a_r = \cdots = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$

$$\boxed{a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}} \qquad \boxed{a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2}$$

Pro srovnání:

$$\boxed{v_\varphi = r\dot{\varphi}} \qquad \boxed{v_r = \dot{r}}$$

Vidíme, že zrychlení vyjádřené v polárních souřadnicích nedostanu „derivováním" v_φ a v_r podle času! (např. $v_r = \dot{r} \cancel{\Rightarrow \dot{v}_r = \ddot{r}}$!)